

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2010. 12. 28.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \arccos \log_{1/2}(2 - x^2)$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (7 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (3×6 pont)

a) $\frac{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n^5} + \frac{5}{n^3} - \frac{1}{n^2}}$ ($n \rightarrow \infty$) b) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ ($n \rightarrow \infty$) c) $\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}$ ($x \rightarrow 0$)

- Adja meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

sor konvergenciaintervallumát! (8 pont)

- Legyen $f_n(x) := \operatorname{arctg}(nx)$. Hol konvergens ez a függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? Igazolja, hogy a konvergencia egyenletes a $[2, 3]$ intervallumon! (12 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 \times 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény az a helyen folytonos? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Definiálja a mértani sor fogalmát és mondja ki a konvergenciájáról szóló tételt!
- Mondja ki a számsorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Mit ért az alatt, hogy $f_n \rightarrow f$ egyenletesen az I intervallumon?
- Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságáról szóló tételt!
- Mondja ki a számsorozatok konvergenciája és korlátossága közötti kapcsolatot leíró tételt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Adjon meg olyan számsorozatot, amelynek pontosan 5 torlódási pontja van!
- Igaz-e, hogy ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n^2$ sor is szükségképpen konvergens?
- Adjon meg olyan függvényt, amely a $[0, 1]$ intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonságú, de nem folytonos!
- Legyen $x_0 = 1$, $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$. Konvergens-e ez a sorozat?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!