

VIZSGADOLGOZAT

Bevezetés az analízisbe, emelt szint, 2010. 12. 21.

A. Feladatok

- Adja meg az $f(x) := \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2x\right)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (8 pont)
- Határozza meg az alábbi határértékeket! (6 + 8 pont)

a) $\frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$ ($n \rightarrow \infty$) b) $\sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$ ($n \rightarrow \infty$)

- Konvergens-e, abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

sor? (10 pont)

- Határozza meg az

$$f_n(x) := \frac{x^n}{1+x^n}$$

függvénysorozat konvergencia-tartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a $[0, 1 - \delta]$ (ahol $0 < \delta < 1$), illetve a $[0, 1]$ intervallumokon? (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen a határértéke c ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az $[a, b]$ -n?
- Mondja ki a (számsorokra vonatkozó) hányadoskritériumot! (Elegendő két alakban.)
- Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
- Definiálja az arcsin x függvényt!

C. További kérdések

(3 + 4 + 7 + 7 pont)

- Igaz-e, hogy ha egy függvény folytonos a $(0, 1)$ nyílt intervallumon, akkor szükségképpen felveszi szélsőértékeit?
- Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), mit jelent az, hogy az f függvény *nem* monoton (a, b) -n!
- Az f függvényről tudjuk, hogy a $[0, \infty)$ félegyenesen folytonos, nemnegatív és felülről nem korlátos. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow \infty$?
- Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus függvényről tudjuk, hogy $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$. Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen állandó?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!