

VIZSGADOLGOZAT

Analízis 3, matek tanár, 2015. 01. 08.

A. Feladatok

1. Határozza meg: (7 + 7 pont)

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = ? \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x} = ?$$

2. A cosinus-függvényt parabolával akarjuk közelíteni a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon. Írja föl a (0 körüli) megfelelő Taylor-polinomot. Adjon (minél pontosabb) becslést a közelítés hibájára. (9 pont)

3. Határozza meg az $y^2 = x(1-x)^2$ egyenletű görbe által határolt korlátos síkidom területét. (8 pont)

4. Vázlatosan ábrázolja a 3. feladatban szereplő síkidomot. Mekkora az $(1, 0)$ pontnál levő szöge? A idomnak a vízszintes „szélessége”, vagy a függőleges „magassága” a nagyobb? (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvénynek az a helyen lokális minimuma van?
2. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát.
3. Mondja ki a monotonitás és a derivált közötti kapcsolatot leíró tételleket.
4. Mondja ki a helyettesítéses integrál formulát határozott integrálra.
5. Mit ért az alatt, hogy f konkáv az $[a, b]$ intervallumon?

C. További kérdések

1. Mutasson példát olyan függvényre, amely valamely pontban egyszer differenciálható, de kétszer nem. (4 pont)

2. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Hol differenciálható ez a függvény? Vázolja a grafikonját a 0 körül! (6 pont)

3. Az f függvényről tudjuk, hogy az a hely egy környezetében háromszor differenciálható és $f'(a) = f''(a) = 0 < f'''(a)$. Hogyan viselkedik f az a pontban? (5 pont)

4. Adja meg a $|\sin x|$ függvény egy primitív függvényét a $(0, 2\pi)$ intervallumon. (5 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!