

## VIZSGADOLGOZAT

Analízis 3, matek tanár, 2014. 12. 11.

### A. Feladatok

1. Határozza meg: (6 + 7 pont)

$$\text{a) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x} = ? \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}} = ?$$

2. Tudjuk, hogy

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}, \quad \text{ha } |x| \text{ kicsi.}$$

a) Adjon becslést a formula hibájára a  $[-1, 1]$  intervallumon. b) Közelítse a gyökfüggvény másodfokú polinommal, becsülje meg a hibát. (10 pont)

3. Diszkutálja és ábrázolja az

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

függvényt. (10 pont)

4. Határozza meg az  $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$  egyenletű görbe és a koordinátatengelyek által határolt korlátos tartomány területét. (7 pont)

### B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény az  $a$  helyen differenciálható?
2. Legyen  $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$  korlátos függvény. Definiálja az intervallum felosztását és a függvény alsó integrálközelítő összegeit.
3. Mondja ki a L'Hospital-szabályt (valamelyik alakban).
4. Mondja ki a helyettesítéses integrál formulát.
5. Mit ért az alatt, hogy  $f$  konkáv az  $[a, b]$  intervallumon?

### C. További kérdések

1. Igazolja, hogy a Dirichlet-függvény *nem* integrálható a  $[-2, 1]$  intervallumon. (5 pont)
2. A  $p$  paraméter mely értékeire igaz, hogy minden  $x > -1$  esetén  $(1+x)^p \leq 1+px$  fönnáll? (5 pont)
3. Legyen  $p(x)$  egy legalább másodfokú polinom. Igazolja, hogy mindig van olyan  $\xi \in (0, 1)$ , amelyre  $p(1) - p(0) < p'(\xi)$  teljesül. (5 pont)
4. Az  $f$  függvény az  $a$  hely egy környezetében négyszer differenciálható, és  $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$ ,  $f^{iv}(a) \neq 0$ . Mit állíthatunk a függvény  $a$ -beli viselkedéséről? (5 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!