

VIZSGADOLGOZAT

Analízis 2, matek tanár, 2014. 06. 24.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \sqrt{\frac{3x-9}{x-2}}$. a) Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. b) Adjon meg olyan intervallumot, ahol invertálható, adja meg az inverzét. Ábrázolja az $f(f^{-1})$ és az $f^{-1}(f)$ függvényeket. (7 + 7 pont)

2. Definíció szerint (azaz küszöbszám-kereséssel) igazolja, hogy az $f(x) := \sqrt{\frac{3x-9}{x-2}}$ függvény folytonos a 3 pontban. (6 pont)

3. Határozza meg az alábbi határértéket: (7 + 5 pont)

$$\text{a) } \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 6x} \quad (x \rightarrow 0) \quad \text{b) } \sqrt{n^2 - n + 3} - \sqrt{n^2 - 2n + 5} \quad (n \rightarrow \infty)$$

4. Legyen

$$b_n := \sqrt[n]{1 + 2^{(-1)^{n \cdot n}}}$$

Adja meg a sorozat torlódási pontjait. (8 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg.)

2. Definiálja adott függvény inverzét.

3. Definiálja az e^x függvényt.

4. Mondja ki a konvergencia sorozatok hányadosáról szóló tételt.

5. Mit ért az alatt, hogy az a_n sorozat torlódási pontja az α szám?

C. További kérdések

1. Legyen $a_n := \sin^{2013} n + \cos^{2014} 3n$. Van-e ennek a sorozatnak torlódási pontja? (3 pont)

2. Az a_n pozitív tagú sorozatról tudjuk, hogy $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0,314$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen korlátos? Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens? És ha azt tudjuk, hogy $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 3,14$? (7 pont)

3. Fogalmazza meg (állító alakban), mit jelent az, hogy az f függvény *nem korlátos*. (4 pont)

4. A f függvényről tudjuk, hogy folytonos a $[0, 1]$ intervallumon. Melyek lehetnek igazak, melyek biztosan igazak az alábbi állítások közül: a) a függvény értékkészlete nyílt intervallum; b) a függvény értékkészlete zárt intervallum; (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!