

VIZSGADOLGOZAT

Analízis 2, matek tanár, 2014. 06. 17.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x\right)$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjon meg olyan intervallumot, ahol invertálható. (9 pont)
2. Határozza meg az alábbi határértéket: (8 + 7 pont)

$$\text{a) } \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \quad (x \rightarrow 4) \quad \text{b) } \frac{n \cdot \operatorname{arctg} n}{n^2 - 3} \quad (n \rightarrow \infty)$$

3. Adjon meg olyan δ küszöbszámot, amelyre igaz, hogy

$$\text{ha } 1 - \delta < x < 1 + \delta, \quad \text{akkor } \frac{x^3 + 4}{(x^2 - 1)^2} > 1000.$$

(7 pont)

4. Legyen $a_{n+1} := \frac{a_n}{2} - 1$. a) Vizsgálja a sorozat monotonitását, korlátosságát és konvergenciáját az $a_1 := -2$ és az $a_1 := -1$ esetekben. b) Igazolja, hogy a sorozat minden kezdőértékre konvergens. (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény jobbról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg.)
2. Definiálja adott függvény inverzét.
3. Mondja ki a rendőr-elvet.
4. Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot.
5. Definiálja a sorozat torlódási pontja fogalmát.

C. További kérdések

1. Legyen $a_n := \sin^{2013} n + \cos^{2014} n$. Van-e ennek a sorozatnak torlódási pontja? (3 pont)
2. Igazolja vagy cáfolja az alábbi állításokat. a) Ha $x \rightarrow \infty$ esetén $f(x) \rightarrow \infty$, akkor $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$. b) Ha $x \rightarrow \infty$ esetén $f(x) \rightarrow 0$, akkor $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$. (6 pont)
3. Lehet-e a) két nem folytonos függvény; b) egy folytonos és egy nem folytonos függvény szorzata folytonos? (A folytonosságot mindenütt ugyanabban az a pontban értve.) (5 pont)
4. Tekintsük az

$$\left\{ \frac{r}{r+1} : r > 0 \text{ racionális szám} \right\}$$

számhalmazt. Igazolja, hogy a halmaz legkisebb felső korlátja 1. (6 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!