

VIZSGADOLGOZAT

Analízis 2, matek tanár, 2014. 06. 10.

A. Feladatok

1. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy az $\frac{x^3+3x-4}{x^2+x+1}$ függvény folytonos az $a = 2$ helyen. (6 pont)

2. Határozza meg az alábbi határértéket: (7 + 7 + 7 pont)

a) $\left(\frac{5n-8}{7n+4}\right)^n$ ($n \rightarrow \infty$) b) $\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{x+1}$ ($x \rightarrow -1$) c) $\sqrt[n]{\frac{3^n+4^n+n^{2014}}{n^2-n+1}}$ ($n \rightarrow \infty$)

3. Legyen

$$f(x) := \log_{1/3} \sqrt{\frac{3x-9}{x-2}}.$$

Vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a monotonitást, adja meg az ÉT-t és az ÉK-et. Vázlatosan ábrázolja. Adja meg az inverzfüggvényét. (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(5 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg.)
2. Mit ért az alatt, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú?
3. Mondja ki az egymásba skatulyázott intervallumokról szóló tételt.
4. Hogyan definiáltuk az e^x függvényt?
5. Mit ért az alatt, hogy egy sorozat konvergens?

C. További kérdések

1. Legyen $a_1 := 2$, $a_{n+1} := a_n + \frac{1}{a_n}$. Vizsgálja a sorozat monotonitását, korlátosságát és konvergenciáját. (6 pont)
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító alakban), hogy egy függvény *nem invertálható* az I intervallumon. (3 pont)
3. Lehet-e két nem folytonos függvény összetétele folytonos? (4 pont)
4. Tekintsük az

$$\left\{ \frac{r}{r+1} : r > 0 \text{ racionális szám} \right\}$$

számhalmazt. Igazolja, hogy a halmaz legkisebb felső korlátja 1. (7 pont)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!