

**VIZSGADOLGOZAT**  
Alkalmazott analízis, 2015. 01. 08.

**Feladatok** (8 + 10 + 12 pont)

1. Számolja ki:

$$\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

ahol a  $C$  görbe az  $0 \leq x, y, z \leq 1$  egységkocka felszínének és az  $x + y + z = \frac{3}{2}$  síknak a metszete.

2. Legyen  $f$  olyan függvény, amelyre  $f(t), t \cdot f(t) \in L$  és  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ ; a Fourier-transzformáltja legyen  $\hat{f}$ . Legyen továbbá

$$g(t) := \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

Fejezze ki a  $\hat{g}$  Fourier-transzformáltat és  $\hat{g}(0)$  értéket.

3. a) Legyen

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < t < 0, \\ \sin t, & \text{ha } 0 < t \leq \pi, \end{cases}, \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Határozza meg  $f$  Fourier-sorát. Hol konvergens a sor? Helyettesítsen  $t = 0$ -t; így egy numerikus sor összegét kapja. Ellenőrizze a kapott eredményt elemi számolással is.

b) Legyen most

$$g(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < t < 0, \\ 1 - \cos t, & \text{ha } 0 < t < \pi, \end{cases}, \quad g(t + 2\pi) = g(t).$$

Hol konvergens a Fourier-sora, mi a sor összege? Az a) rész eredménye felhasználásával határozza is meg Fourier-sort. (Mi a kapcsolat  $f$  és  $g$  között?)

**Elmélet** (8 + 12 + 10 pont)

A. Mondja ki a divergenciatételt, ha ideje engedi, vázolja a bizonyítását. Mutasson példát többszörösen összefüggő tartományokra; Igaz marad-e a tétel ilyen tartományon? Adja meg a divergencia koordinátafüggetlen definícióját.

B. Mondja ki a Fourier-transzformáltra vonatkozó Dini-féle tételt. Mi a kapcsolat a Dini- és a Lipschitz-feltétel között? Ismertesse a Fourier-magfüggvény legfontosabb tulajdonságait. (Ha ideje engedi, állításait bizonyítsa is.)

C. Adja meg a Csebisev-polinomok definícióját, sorolja fel legfontosabb tulajdonságait. Fogalmazza meg az approximáló tulajdonságukat (ha ideje engedi, vázolja a bizonyítást).

Jó munkát!