VIZSGADOLGOZAT

Alkalmazott analízis, 2014. 12. 11.

Feladatok $(8 + 10 + 12$ pont$)$

1. Számolja ki:

$$\int_C (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz\,,$$

ahol a C görbe az $0 \le x, y, z \le 1$ egységkocka felszínének és az $x + y + z = \frac{3}{2}$ síknak a metszete.

2. Legyen f olyan függvény, amelyre $f(t), t \cdot f(t) \in L$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 0$; a Fourier-transzformáltja legyen $\widehat{f}$. Legyen továbbá

$$g(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx\,.$$

Fejezze ki a $\widehat{g}$ Fourier-transzformáltat és $\widehat{g}(0)$ értéket.

3. Tudjuk, hogy egy $\rho = \rho(\vec{r})$ tömegsűrűség által létrehozott gravitációs mezőben valamely m tömegű tömegpontra ható erőre igaz, hogy $\operatorname{div} \mathbf{F} = -\gamma\, m\, \rho(\vec{r})$ (ahol $\gamma > 0$ állandó). Vizsgáljuk most egy M tömegű, R sugarú homogén gömb gravitációs mezőjét.

a) Adja meg a gömb középpontjától r távolságban a m tömegű tömegpontra ható erőt az $r < R$ és az $r > R$ esetekben is (nyilván $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\vec{r})$ alakú képletet keresünk).

b) Adja meg, mekkora munkát kell ahhoz végezni, hogy a gömb felszínén levő tömegpontot elvigyük a végtelenbe (kb. „egy űrhajó elhagyja a bolygót”). Mekkora sebességgel kell elindulnia a tömegpontnak, hogy ez bekövetkezzék?

Elmélet $(8 + 12 + 10$ pont$)$

A. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumon az alábbi függvényrendszert: $r_0(x) := 1$, $r_n(x) := \operatorname{sgn} \sin(2^n \pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Igazolja, hogy ez a függvényrendszer (L^2-ben) ortogonális, de nem teljes. (Sokat segíthet, ha lerajzolja az első néhány r_n függvényt.)

B. Mondja ki a Fourier-transzformáltra vonatkozó Dini-féle tételt. Mi a kapcsolat a Dini- és a Lipschitz-feltétel között? Ismertesse a Fourier-magfüggvény legfontosabb tulajdonságait. (Ha ideje engedi, állításait bizonyítsa is.)

C. Adja meg a Csebisev-polinomok definícióját, sorolja fel legfontosabb tulajdonságaikat. Fogalmazza meg az approximáló tulajdonságukat (ha ideje engedi, vázolja a bizonyítást).

Jó munkát!