VIZSGADOLGOZAT

Alkalmazott analízis, 2012. 01. 24.

Feladatok $(12 + 12 + 6$ pont$)$

1. Legyen $\mathbf{F} := P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, ahol

$$P(x,y,z) := \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \quad Q(x,y,z) := \frac{x}{x^2+y^2}\,, \quad R(x,y,z) := 0.$$

Vannak-e olyan $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, illetve $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvények, amelyekre $\mathbf{F} = \operatorname{grad}\varphi$, illetve $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$ teljesül (az $x, y > 0$ térrészen)?

2. Legyen

$$f(t); = \begin{cases} e^{-t}, & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozza meg a függvény Fourier-transzformáltját, ennek ismeretében számolja ki az

$$\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega t + \cos \omega t}{1+\omega^2}\, d\omega$$

integrált.

3. Legyen $f(x) := x$, $0 \le x \le 2$. Állítsa elő ezt a függvényt sinus-sor összegeként! Hol konvergens a kapott sor? Hova konvergál?

Elmélet $(6 + 12 + 12$ pont$)$

A. Mondja ki a Gauss-tételt, adja meg a divergencia koordinátafüggetlen definícióját és vezesse le a div operátor alakját térbeli hengerkoordinátarendszerben!

B. Ortogonális polinomrendszerek: példák, rekurzió, Diriclet-magfüggvény, ortogonális polinomrendszerek szerinti sorok konvergenciája. (Ha ideje engedi, valamelyik állítását bizonyítsa is.)

C. Mondja ki Weierstrass approximációs tételeit. Valamelyik bizonyítását vázolja.

Jó munkát!