VIZSGADOLGOZAT

Alkalmazott analízis, 2012. 01. 17.

Feladatok $(6 + 6 + 12 + 6$ pont)

1. Legyen S az $x^2 + y^2 = z^2$ felületnek a $z = 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ alakzatok közötti darabja. Adja meg S-nek egy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ paraméteres előállítását. Számolja ki a felület nagyságát.

2. Legyen $\mathbf{v} := 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ és S az egységgömb felülete. Számolja ki az $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$ integrált.

3. Legyen

$$f(t); = \begin{cases} e^{-t}, & \text{ha } t > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozza meg a függvény Fourier-transzformáltját, ennek ismeretében számolja ki az

$$\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega t + \cos \omega t}{1 + \omega^2}\, d\omega$$

integrált.

4. Igazolja, hogy ha $f(t) = \frac{1}{t} \frac{d}{dt} g(t)$, akkor $F(p) = \int_p^\infty qG(q)\, dq$ (itt F é G a Laplace-transzformáltak).

Elmélet $(6 + 12 + 12$ pont)

A. Hogyan rekonstruálható egy skalártér a gradiense ismeretében?

B. Mondja ki a) a Riemann–Lebesgue lemmát, b) a Lagrange-lemmát. Ha ideje engedi, az egyiket bizonyítsa is.

C. Mondja ki a (trigonometrikus Fourier-sorra vonatkozó) Dini-féle tételt! Melyek a legfontosabb következményei? Mik a kapcsolatok a különböző rendű Lipschitz-feltételek, a folytonosság és a differenciálhatóság között? (Ha ideje engedi, valamelyik állítását bizonyítsa is.)

Jó munkát!