Valós függvénytan tematika

(erről volt szó előadáson)

- Fogalmak: halmazsorozat, halmazsorzat $\overline{\lim}$-ja és $\underline{\lim}$-je, monoton halmazsorozat. Halmazgyűrű és halmazalgebra, σ-gyűrű és -algebra. Monoton halmazosztályok elemi tulajdonságai
- Mérték fogalma, mérték teljessége. A_n növekvő halmazsorozat esetén $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$ és A_n csökkenő halmazsorozat és $\exists n{:}\mu(A_n) < \infty$ esetén $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$. Mérték alaptulajdonságai
- Külső mérték fogalma és tulajdonságai
- Külső mérték által indukált mérték. Az indukált mérték teljessége
- Borel-halmazok $\mathbb{R}$-en és $\mathbb{R}^k$-n (σ-gyűrű). Lebesgue-mérték és elemi tulajdonságai. A Lebesgue-mérték folytonossága
- A Cantor-féle halmaz
- A Lebesgue-féle szinguláris függvény
- Példa Lebesgue szerint nem mérhető halmazra
- A 0 mértékű halmazok jellemzése, tulajdonságai
- A monoton függvények mm. folytonosak
- Példa sehol sem differenciálható folytonos függvényre
- Folytonos monoton függvény mm. differenciálható (bizonyítás nélkül). Ez a tétel nem élesíthető (ellenpélda)
- Mérhető függvények, tulajdonságaik, összeg, szorzat, alsó, felső burkolók, $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\lim f_n$ mérhetősége
- Mérhető függvények előállítása lépcsősfüggvények sorozata határértékeként
- Lépcsősfüggvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai
- Mérhető függvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai
- A Lebesgue-integrál fogalma. Az integrál alaptulajdonságai. (linearitás, halmaz szerinti additivitás, becslések stb.)
- Lemma a monoton konvergenciáról
- Nemnegatív mérhető függvények sorozatának határértéke, ha az integrálok korlátosak
- Konvergenciatételek: Lebesgue tétele a monoton konvergenciáról. Beppo Lévi tétele
- Lebesgue tétele a majorált konvergenciáról. Fatou lemmája
- Példák arra, hogy fentiek nem igazak Riemann-integrálra
- A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériuma
- Az $\mathbb{R}$ teljességi axiómájának kül. alakjai és kapcsolataik. A Heine–Borel tétel. $\mathbb{R}$ nyílt halmazai előállnak nyílt intervallumok uniójaként
- Riemann-integrál, Riemann-improprius integrál és Lebesgue-integrál kapcsolata
- Korlátos változású függvények, kapcsolat a monotonitással. Függvény előre adott ugrásokkal
- Az integrálfüggvény korlátos változású. $F' = f$ mm. Az integrálfüggvények teljesen folytonosak

- konvergenciafogalmak: Pontonkénti, majdenm mindenütt, normában, integrálátlagban való konvergencia és kapcsolataik. Pontonkénti és egyenletes konvergencia, Jegorov tétel
- Skaláris szorzat, Hilbert-tér. Lineáris függetlenség, ortonormált rendszerek, teljesség
- Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség, Bessel egyenlőtlenség. Az általános (ONR szerinti) Fourier sor részletösszegeinek minimumtulajdonsága
- Riesz–Fischer tétel L^2-ben
- Parseval-formula
- A trigonometrikus Fourier-sor L^2-ben és L-ben. A trigonometrikus rendszer ortogonalitása és teljessége
- Fourier-sor és Taylor sor hasonlósága és különbsége. Példák Fourier-sorra. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$
- Fourier-sorfejtés, Fourier együtthatók elemi tulajdonságai. A Riemann–Lebesgue lemma
- A Fejér-féle összegzés fogalma, elemi tulajdonságai
- Banach tér, homogén Banach tér, szummációs magfüggvény fogalma
- Ha B egy Banach tér, $\varphi : [0, 2\pi) \to B$ folytonos és k_n egy szummációs magfügggvény, akkor $\lim_n \frac{1}{2\pi} \int k_n(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$
- A tétel alkalmazásai, $\sigma_n \to f$ L-normában, Fejér-féle magfüggvény. A trigonometrikus polinomok sűrűek L-ben, a Fourier-sorok egyértelműségi tétele
- Példák homogén Banach terekre, C, L^p homogén Banach-terek. Honogén Banach-térben a trigonometrikus polinomok sűrűek. $f \in C$ egyenletesen közelíthető trigonometrikus polinommal
- A Fourier-sor részletösszegeinek előállítása. A Dirichlet-féle magfüggvény
- Dini-féle, Dini–Lipschitz-féle, félérintős feltételek a Fourier sor lokális konvergenciájára. A lokalizációs tétel
- Pontonkénti Fejér-féle összegezhetőség, Fejér tétel, Lebesgue-pont fogalma, Lebesgue-tétel
- Kolmogorov példája, Carleson tétel (bizonyítások nélkül!)
- Hilbert-tér és Banach terek, Hölder- és Minkowsky-egyenlőtlenség, L, L^p, L^∞ terek fogalma
- Lineáris funkcionálok, korlátosság és folytonosság, duális tér
- A Hilbert tér duálisa, Riesz–Fréchet tétel. Az L^p-terek duálisai (bizonyítás nélkül)
- Weierstrass approximációs tétele (mindkét alakban). A Bernstein-polinomok

2002. december 5

Németh Zoltán