Végtelen sorok szummációi tematika
(erről volt szó előadáson)

- Az ismert konvergenciakritériumok áttekintése. A majoráns kritérium különböző alakjai. Konvergencia és divergencia, a $\frac{c_n}{d_n}$ sorozat viselkedése. Példa $\sum a_n$ konvergens sorra, ahol $a_n \to 0$ tetszőlegesen lassan. A Dini-, Abel–Dini- és Pringsheim-féle tételek. Iterált logaritmusos kritériumok. A Kummel-féle eljárás, a Raabe kritérium.
- A Fejér-féle $(C, 1)$ összegzés elemi tárgyalása. Permanencia. $s_n \to s$ $(C, 1)$ esetén $\frac{s_n}{n} \to 0$, ez nem javítható. Van korlátos sorozat, ami nem $(C, 1)$ limitálható. Alkalmazások: A gyök- és a hányadoskritérium összehasonlítása, $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$, a Cauchy-féle szorzatsor $(C, 1)$ összegezhető.
- Tauber tétele ($na_n \to 0$ és $(C, 1)$), a lassú csökkenés és a lassú oszcilláció fogalma. Ha $s_n \to s$ $(C, 1)$ és s_n lassan csökken, akkor konvergens. $(C, 1)$-limitálhatóság, lassú csökkenés és az $na_n \to 0$ feltételek kapcsolata.
- Példák: $\sum(-1)^n$, $\sum z^n$, $\sum(-1)^n\sqrt{n+1}$, $\sin(\log n)$.
- A Hölder-féle összegzési eljárások. Kapcsolatuk a (C, k) módszerrel. A $\sum(-1)^n(n + 1)$ sor.
- Sorozat-sorozat transzformációk. A Töplitz–Schur tétel (elegendőség, (ii)–(v) szükségessége). Alkalmazások: A Mertens-tétel nem javítható, a Cesàro–Stoltz lemma, példa a lemma alkalmazására.
- Az általános Cesàro módszer. A Cesàro-számok és tulajdonságaik. Formulák $\sigma_n^{(\alpha)}$-re. A módszer tulajdonságai. Jellegzetes (permanencia, linearitási, eltolási, konvexitási, limitációs, konvergenciafaktor, Tauber-típusú) tételek.
- A $(C, 1)$ szummálhatóság jellemzése a $\sum b_n$, $b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}$ sorral. Alkalmazások: A Hardy–Landau-féle ($na_n > -K$) és a $\sum n^p|a_n|^{p+1}$ Taunber-típusú feltételek. Alkalmazás korlátos változású függvény Fourier-sorára.
- Egy $\sum a_n$ konvergens sorra $na_n \to 0$ $(C, 1)$. A Kronecker lemma. Alkalmazás Fourier sorok együtthatóira.
- Az Abel-féle összegzés. A (C, k) és az (A) módszer kapcsolata.
- A Nörlund-féle módszerek. A $\sigma_n = 2S_n - S_{n-1}$ „csúszó összeg” vizsgálata. Az általános Nörlund módszer. Permanencia és konzisztencia. Ha $s_n \to s$ (N, p_n), akkor $s(z)$ a $|z| < 1$-re kiterjeszthető és $\lim(1 - x)s(x) = s$, ha $x \to 1$, $0 \leq x < 1$.
- Erős és abszolút konvergencia és összegezhetőség. A $[C, \alpha]_\lambda$ és a $|C, \alpha|_\lambda$ módszerek. A λ paraméter változtathatósága. $[C, \alpha]_\lambda$ és (C, α), $|C, \alpha|_\lambda$ és (C, α) módszerek összehasonlítása (tételek, ill. ellenpéldák). Tandori K. és Leindler L. tételei ortogonális sorokra.
- Sűrűség általános fogalma. Sűrűség $\mathbb{N}$-en. Példa sűrűséggel nem rendelkező halmazra. A statisztikus limes. Statisztikus limes és a $[C, 1]_\lambda$ módszer kapcsolata. A dekompozíciós tétel.
- A Banach–Steinhaus tétel. A c, c_0, ℓ, ℓ^∞ sorozatterek és normáik. A $c_0 \to c_0$ lineáris operációk mátrixa és operátornormája. A Töplitz-Schur tétel (i) feltételének szükségessége. A c tér duálisa.

Figyelem, ez nem tételsor! Vizsgán a fogalmakat, tételeket, kapcsolataikat kell ismerni, valamint az előadáson elhangzott, egyszerűbb (!) bizonyításokat, példákat.

Németh Zoltán, 2003. 05. 07.