Komplex és valós függvénytan (Mt4221) tételsor
(mat. tanár szak, 2007–2008.)

1. Komplex függvény lokális differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltétele a Cauchy–Riemann-féle egyenletekkel
2. Komplex hatványsor tagonként differenciálható
3. Az e^z és a $\log z$ komplex függvények definíciója, tulajdonságaik
4. A $\sin z$ és a $\cos z$ komplex függvények definíciója, tulajdonságaik. Euler-féle formulák
5. A komplex vonalintegrál definíciója és tulajdonságai: linearitás, becslések. Primitív függvény
6. Goursat lemmája
7. Cauchy-féle integráltétel
8. Az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrál
9. A Cauchy-féle integráltétel Riemann-féle kiterjesztése
10. Holomorf függvény Taylor-sorba fejtése
11. Holomorf függvény akárhányszor differenciálható. Cauchy-féle integrálformulák és egyenlőtlenségek
12. Liouville tétele
13. Az algebra alaptétele
14. Holomorf függvény zérushelyei izoláltak
15. Gyűrűszerű tartományon holomorf függvény Laurent-sorba fejtése
16. A pólusszingularitás és jellemzése
17. A lényeges szingularitás. A Casorati–Weierstrass tétel
18. A residuum kiszámítása egyszerűbb esetekben
19. A residuum-tétel. Az $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ integrál
20. A_n növekvő halmazsorozat esetén $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$ és A_n csökkenő halmazsorozat és $\exists n{:}\mu(A_n) < \infty$ esetén $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.
21. Mérték alaptulajdonságai, mérték folytonossága
22. A Lebesgue-féle külső mérték. A Lebesgue-mérték konstrukciója (a mérhető halmazok σ-gyűrűt alkotnak)
23. A Lebesgue-mérték elemi tulajdonságai
24. A Cantor-féle halmaz
25. A 0 mértékű halmazok jellemzése, tulajdonságai
26. Mérhető függvények, tulajdonságaik, összeg, szorzat, alsó, felső burkolók, $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\lim f_n$ mérhetősége
27. Mérhető függvények előállítása lépcsősfüggvények sorozata határértékeként
28. Lépcsősfüggvények és nemnegatív mérhető függvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai
29. A Lebesgue-integrál fogalma. Az integrál alaptulajdonságai. (linearitás, halmaz szerinti additivitás, becslések stb.)

30. Konvergenciatételek: Lebesgue tétele a monoton konvergenciáról. Beppo Lévi tétele
31. Lebesgue tétele a majorált konvergenciáról. Fatou lemmája
32. Példák arra, hogy a Lebesgue-itegrál konvergenciatételei nem igazak Riemann-integrálra
33. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériuma
34. Az L^2 tér. Bessel egyenlőtlenség. Az L^p terek
35. A $C[a, b]$ tér.
36. Riesz–Fischer tétel L^2-ben
37. Parseval-formula. $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
38. Néhány érdekes valós függvénytani példa

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

Komplex számok, C nem rendezhető, kanonikus és trigonometrikus alak. Tartományok, összefüggőség, nyíltság.

Komplex hatványsor, konvergenciasugár, abszolút és egyenletes konvergencia. Komplex függvények folytonossága és differenciálhatósága. Összetett és inverzfüggvények differenciálása. Harmonikus függvények, harmonikus társ. Holomorf és meromorf függvények. Izolált szinguláris helyek osztályozása. Az $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ integrál.

Halmazsorzat $\overline{\lim}$-ja és $\underline{\lim}$-je, monoton halmazsorozat. Halmazgyűrű és halmazalgebra, σ-gyűrű és -algebra. Mérték fogalma, mérték teljessége. Külső mérték fogalma és tulajdonságai. Indukált mérték, Indukált külső mérték.

Példa Lebesgue szerint nem mérhető halmazra. Lemma a monoton konvergenciáról, korlétos integrálú nemnegatív mérhető függvények sorozatának határértéke.

Riemann-integrál, Riemann-improprius integrál és Lebesgue-integrál kapcsolata.

Norma és skaláris szorzat. Banach tér, Hilbert tér. Lineáris függetlenség, ortonormált rendszerek, teljesség. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség

2008. 05. 12.

Németh Zoltán