

Komplex és valós függvénytan tételsor

(mat. tanár szak, 2006–2007.)

1. Komplex függvény lokális differenciálhatóságának szükséges és elégséges feltétele a Cauchy–Riemann-féle egyenletekkel
2. Ha f holomorf és $f' = 0$; vagy ha f holomorf és $|f|$ állandó, akkor f is állandó
3. Komplex hatványsor tagonként differenciálható
4. Az e^z és a $\log z$ komplex függvények definíciója, tulajdonságaik
5. A $\sin z$ és a $\cos z$ komplex függvények definíciója, tulajdonságaik. Euler-féle formulák
6. A komplex vonalintegrál definíciója és tulajdonságai: linearitás, becslések. Primitív függvény
7. Goursat lemmája
8. Cauchy-féle integráltétel csillagszerű tartományokra
9. Az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integrál
10. A Cauchy-féle integráltétel Riemann-féle kiterjesztése
11. Holomorf függvény Taylor-sorba fejtése
12. Holomorf függvény akárhányszor differenciálható. Cauchy-féle integrálformulák és egyenlőtlenségek
13. Liouville tétele
14. Az algebra alaptétele
15. Morera tétele
16. Holomorf függvény zérushelyei izoláltak
17. Gyűrűszerű tartományon holomorf függvény Laurent-sorba fejtése
18. A pólusszingularitás és jellemzése
19. A lényeges szingularitás. A Casorati–Weierstrass tétel
20. A residuum kiszámítása egyszerűbb esetekben
21. A residuum-tétel. Az $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integrál
22. A_n növekvő halmzsorozat esetén $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$ és A_n csökkenő halmzsorozat és $\exists n: \mu(A_n) < \infty$ esetén $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$. Mérték alaptulajdonságai
23. Lebesgue-mérték és elemtulajdonságai. A Lebesgue-mérték folytonossága
24. A Cantor-féle halmaz
25. A Lebesgue-féle szinguláris függvény
26. A 0 mértékű halmazok jellemzése, tulajdonságai
27. A monoton függvények mm. folytonosak
28. Példa sehol sem differenciálható folytonos függvényre
29. Folytonos monoton függvény mm. differenciálható (bizonyítás nélkül). Ez a tétel nem élesíthető (ellenpélda)
30. A korlátos változású függvények előállíthatók monoton függvények különbségeként. Függvény előre adott ugrásokkal (biz. nélkül)

31. Mérhető függvények, tulajdonságaik, összeg, szorzat, alsó, felső burkolók, $\underline{\lim} f_n$, $\overline{\lim} f_n$, $\lim f_n$ mérhetősége
32. Mérhető függvények előállításuk lépcsősfüggvények sorozata határértékeként
33. Lépcsősfüggvények és nemnegatív mérhető függvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai
34. A Lebesgue-integrál fogalma. Az integrál alaptulajdonságai. (linearitás, halmaz szerinti additivitás, becslések stb.)
35. Konvergenciatételek: Lebesgue tétele a monoton konvergenciáról. Beppo Lévi tétele
36. Lebesgue tétele a majorált konvergenciáról. Fatou lemmája
37. Példák arra, hogy a Lebesgue-integrál konvergenciatételei nem igazak Riemann-integrálra
38. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériuma
39. A Heine–Borel tétel
40. Az integrálfüggvények abszolút folytonosak
41. Bessel egyenlőtlenség. Az általános (ONR szerinti) Fourier sor részletösszegeinek minimumtulajdonsága
42. Riesz–Fischer tétel L^2 -ben
43. Parseval-formula. $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

Komplex számok, C nem rendezhető, kanonikus és trigonometrikus alak. A teljességi axióma különböző alakjai. Tartományok, összefüggőség, nyíltság, körlánc tétel. Konvex és csillagszerű tartományok.

Komplex hatványsor, konvergenciasugár, abszolút és egyenletes konvergencia. Komplex függvények folytonossága és differenciálhatósága. Összetett és inverzfüggvények differenciálása. Harmonikus függvények, harmonikus társ. Holomorf és meromorf függvények. Izolált szinguláris helyek osztályozása. Az $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ integrál.

Halmazszorzat $\overline{\lim}$ -ja és $\underline{\lim}$ -je, monoton halmazsorozat. Halmazgyűrű és halmazalgebra, σ -gyűrű és -algebra. Mérték fogalma, mérték teljessége. Külső mérték fogalma és tulajdonságai. Indukált mérték, Indukált külső mérték.

Példa Lebesgue szerint nem mérhető halmazra. Lemma a monoton konvergenciáról, korlátos integrálú nemnegatív mérhető függvények sorozatának határértéke.

Riemann-integrál, Riemann-improprius integrál és Lebesgue-integrál kapcsolata. Az abszolút folytonosság. Az integrálfüggvények mm. differenciálhatók.

Norma és skaláris szorzat. Banach tér, Hilbert tér. Lineáris függetlenség, ortonormált rendszerek, teljesség. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség

2006. december 1.

Németh Zoltán