Ortogonális sorok tematika
(erről volt szó előadáson)

- Hilbert tér, súlyfüggvény szerinti skaláris szorzat. Az L^2 tér, Riesz–Fischer tétel
- Lineáris függetlenség, ortogonalitás, Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- Az általánosított Fourier sor. A részletösszegek minimumtulajdonsága, Bessel-egyenlőtlenség, Parseval-formula
- $f \in L^2$ függvény általánosított Fourier-együtthatói 0-hoz tartanak. Ha (φ_n) egyenletesen korlátos ONR és a $\sum c_n\varphi_n$ sor mm. konvergens, akkor $c_n \to 0$; az egyenletes korlátosság nem hagyható el
- A trigonometrikus rendszer $[-\pi, \pi)$-n, a sinus- és a cosinus-rendszer $[0, \pi]$-n
- A Legendre-féle polinomok definíciója, Rodrigues-formula, differenciálegyenlet
- A Csebisev-féle polinomok definíciója, differenciálegyenletük. A Csebisev-polinomok egyenletesen legjobban közelítik a 0 függvényt
- A Rademacher rendszer ortogonális, nem teljes. $\sum c_n^2 < \infty \Leftrightarrow \sum c_n r_n(x)$ mm. konvergens. A $\sum \pm c_n$ sor konvergenciája
- A Walsh rendszer. Definíció, ortogonalitás, teljesség
- A Haar rendszer. Definíció, ortogonalitás, teljesség. A Haar rendszer Dirichlet-féle magfüggvénye. Az $f \in L$ Haar-sora majdnem mindenütt konvergens; a Haar-sor egyenletesen konvergens f folytonossági pontjaiban, $f \in C$ Haar-sora egyenletesen konvergens
- Ortogonális polinomok szerinti sorok. Ortogonális polinomokra vonatkozó rekurzió és a Christoffel–Darboux formula. A konvergencia Dini–Lipschitz féle elegendő feltétele
- A Lipschitz-feltétel. Kapcsolata a folytonossággal, a $\mathrm{Lip}\,\alpha$ terek normája
- A lokális konvergencia vizsgálata. A Dirichlet-féle magfüggvény
- A Banach–Steinhaus tétel. A Lebesgue-függvény szerepe. Ha $\forall f \in C$-re $s(f, x) \to f(x)$, akkor $L_n(x)$ korlátos; ha (φ_n) zárt rendszer, ez elegendő feltétel is
- A trigonometrikus renszerre $L_n(x) = L_n \approx \log n$, a Haar rendszerre $L_n(x) \equiv 1$
- Olevskii lemmája. Egyenletesen korlátos ONR Lebesgue-függvénye. Ha (φ_n) egyenletesen korlátos ONR, akkor nem bázis C-ben
- Részsorozatok konvergenciája. Ha $1 \le n \le 2^k$, a Haar és a Walsh függvények ugyanazt az alteret generálják. Ha $\lim \frac{\nu_{k+1}}{\nu_k} = 1$, az $L_{\nu_k}(x)$ Lebesgue-függvény nem korlátos. Nincs az L-ben egyenletesen korlátos bázis
- A Franklin rendszer
- A majdnem mindenütt konvergencia. A $\sum |a_n| < \infty$ elegendő feltétel. Konvergenciarendszerek. Rademacher rendszer, Carleson tétel. Sorozatterek
- A Rademacher–Menysov lemmák, a Rademacher–Menysov tétel. A $\sum |a_n| < \infty$ és a $\sum a_n^2 \log^2 n$ feltételek nem összehasonlíthatók
- Sorozatok Tandori-féle normájának alaptulajdonságai. Ha $\|c\| < \infty$, $\sum c_n\varphi_n(x)$ majdnem mindenütt konvergens
- A feltétel nélküli konvergencia. Tandori K. tétele
- Izomorfia és gyenge izomorfia. A Haar rendszer szerepe a teljes ONR szerinti sorok divergenciája jellemzésében. A Haar rendszer ω-átrendezése

- Feltétel nélküli és abszolút konvergencia feltételei. Ha a Haar-sor feltétel nélkül konvergens, akkor abszolút konvergens is. Ha $\sum \frac{1}{n\omega(n)} < \infty$, akkor $\sum c_n^2 \omega(n) < \infty$ elegendő a Haar-sor feltétel nélküli konvergenciájához
- A Kolmogorov–Seliverstov–Plessner tétel. Az alaplemma: ha $\lambda_n \uparrow$, $L_{\nu_n}(x)/\lambda_{\nu_n}$ korlátos és $\sum c_n^2 < \infty$, akkor $s_{\nu_n}(x)/\sqrt{\lambda_{\nu_n}}$ korlátos; ha $L_n(x)/\lambda_n$ korlátos és $\sum c_n^2 \lambda_n < \infty$, az ortogonális sor majdnem mindenütt konvergens
- A Dirichlet mag trigonometrikus rendszer és ortogonális polinomrendszer esetén, a $\sum c^2 \log n < \infty$ feltétel elegendősége

Figyelem, ez nem tételsor! Vizsgán a fogalmakat, tételeket, kapcsolataikat kell ismerni, valamint az előadáson elhangzott, egyszerűbb (!) bizonyításokat, példákat. (A fenti tételek nem mindegyikét bizonyítottuk; sokszor csak az egyik irányt; sokszor egy nem bizonyított lemmából indultunk.)

Németh Zoltán, 2004. 05. 05.