

**A komplex és valós fvtan elemei alkalmazásokkal  
tematika (2014–2015 tavasz)**

1. Komplex számok, kanonikus és trigonometrikus alak. Tartományok, összefüggőség, nyíltság, körlánc tétel. Konvex és csillagszerű tartományok
2. Komplex függvények folytonossága és differenciálhatósága. Differenciálható függvények által létesített leképezések tulajdonságai
3. A Cauchy–Riemann-féle egyenletek(\*). Összetett és inverzfüggvények differenciálása. Harmonikus függvények, harmonikus társ
4. Komplex hatványsor, konvergenciasugár, abszolút és egyenletes konvergencia. Komplex hatványsor tagonként differenciálható(\*)
5. Az  $e^z$ ,  $\log z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  komplex függvények definíciója, tulajdonságaik(\*). Euler-féle formulák
6. A komplex vonalintegrál definíciója és tulajdonságai: linearitás, becslések
7. Goursat lemmája. Cauchy-féle integráltétel(\*) és Riemann-féle kiterjesztése.
8. Holomorf függvény Taylor-sorba fejtése(\*). Holomorf függvény akárhányszor differenciálható. Cauchy-féle integrálformulák és egyenlőtlenségek
9. Liouville tétele, Morera tétele, az algebra alaptétele(\*). Holomorf függvény zérushelyei izoláltak
10. Gyűrűszerű tartományon holomorf függvény Laurent-sorba fejtése(\*)
11. Izolált szinguláris helyek. A pólusszingularitás és jellemzése(\*). A lényeges szingularitás. A Casorati–Weierstrass tétel
12. A residuum kiszámítása egyszerűbb esetekben. A residuum-tétel(\*)
13. Az  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx$ ,  $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  integrálok
14. Halmazzorozatok. Halmazgyűrű és halmazalgebra,  $\sigma$ -gyűrű és  $\sigma$ -algebra. Mérték fogalma, mérték teljessége. Külső mérték fogalma és tulajdonságai. Indukált mérték, Indukált külső mérték
15. Lebesgue-mérték és elemi tulajdonságai(\*). A Lebesgue-mérték folytonossága(\*)
16. A Cantor-féle halmaz(\*). A 0 mértékű halmazok jellemzése, tulajdonságai(\*)
17. A monoton függvények mm. folytonosak(\*). Monoton függvények és korlátos változású függvények
18. Mérhető függvények, tulajdonságaik, összeg, szorzat, alsó, felső burkolók,  $\underline{\lim} f_n$ ,  $\overline{\lim} f_n$ ,  $\lim f_n$  mérhetősége(\*) Mérhető függvények előállítása lépcsősfüggvények sorozata határértékeként(\*)
19. Lépcsősfüggvények és nemnegatív mérhető függvények integrálja. A Lebesgue-integrál fogalma. Az integrál alaptulajdonságai(\*) (linearitás, halmaz szerinti additivitás, becslések, mindhárom lépésben)
20. Konvergenciatételek: Lebesgue tétele a monoton konvergenciáról. Beppo Lévi tétele, Lebesgue tétele a majorált konvergenciáról(\*), Fatou lemmája
21. Lebesgue-integrál és Riemann integrál kapcsolata(\*)
22. Norma és skaláris szorzat. Banach tér, Hilbert tér. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség(\*) Lineáris függetlenség, ortonormált rendszerek, teljesség.
23. A trigonometrikus rendszer ortogonalitása és teljessége(\*) ( $L^2$ -ben és  $L$ -ben is). A Fourier-sor. Bessel egyenlőtlenség, Parseval-formula
24. Dirichlet mag. A Fourier-sor konvergenciája(\*). Alkalmazások.

Vizsgán ismerni kell a definíciókat, a fogalmak alapvető tulajdonságait, kapcsolataikat, a tételeket; a (\*)-gal jelölt tételek bizonyításait is.

A vizsgadolgozatnak lesz feladat-része is: a gyakorlatokon szerepelt, illetve a kiadott feladatokhoz hasonló feladatok.