

**Tételjegyzék**  
**Bevezetés az analízisbe**

2010/11. őszi félév, I. évf. matematika alapszak, nappali, emelt szint)

1. A Cantor-tétel (bizonyítása a felsőhatár-tulajdonságból)
2. A számtani és mértani közepek tétele
3. Monoton, korlátos sorozat konvergencia
4. Konvergencia sorozatok szorzatára vonatkozó tétel
5. Konvergencia sorozatok egyenlőtlenségi tételei (ha  $a_n \geq b_n$ , ill. ha  $a > b$ )
6. A rendőr-elv
7. Az  $(\frac{1}{n^\alpha})$  ( $\alpha \geq 1$ ) és a  $(q^n)$ ; sorozatok konvergenciája
8. Az  $(\frac{n}{2^n})$  sorozat konvergenciája
9. Az  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$  sorozat konvergenciája
10. Az  $(1 + \frac{1}{n})^n$  és az  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  sorozatok konvergenciája
11. Az  $(\sqrt[n]{n})$  és a  $(\sqrt[n]{a})$  sorozatok konvergenciája
12. Kör kerületének kétoldali közelítése rekurzív sorozatokkal; a sorozatok konvergenciája
13.  $\sigma_n := \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \dots + s_n)$  konvergenciája; alkalmazás az  $\sqrt[n]{n!}/n$  sorozatra
14. A  $\infty$ -divergens sorozatok. Műveletek  $\infty$ -divergens sorozatokkal (+, -)
15. Bolzano–Weierstrass tétel (monoton részsorozat létezése, intervallumfelezés)
16. Cauchy-féle kritérium sorozatokra
17. A torlódási pontok között van legnagyobb és legkisebb
18. A  $\sum q^n, \sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}$  sorok konvergenciájának vizsgálata (definíció szerint)
19. Műveletek konvergencia sorokkal. Linearitás, csoportosíthatóság
20. Abszolút konvergencia sor átrendezései
21. Példák feltételesen konvergencia sor különböző átrendezéseire
22. A gyökkritérium (mindhárom alakja)
23. A majoránskritérium
24. Leibniz-féle kritérium. Az  $|s_n - s|$  becslése
25. A Dirichlet-féle kritérium
26. A Cauchy-féle szorzatsor. Mertens tétele
27. A Cauchy–Hadamard tétel
28. Példák: hatványsor konvergencia viselkedése a konvergencia-intervallum végpontjaiban
29. Az  $e(x) := \sum \frac{x^n}{n!}$  függvény:  $e(1) = e; e(x_1 + x_2) = e(x_1)e(x_2)$
30. Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája a konvergencia-intervallum belsejében. Az összegfüggvény folytonos
31. Függvény folytonossága, a két definíció ekvivalenciája
32. Folytonos függvények szorzata és hányadosa

33. Folytonos függvények összetétele és inverze
34. Intervallumon folytonos függvény Bolzano–Darboux tulajdonsága
35. Példák olyan függvénysorozatokra, ahol  $f_n \rightarrow f$ , és  $f_n$  folytonos,  $f$  nem; illetve  $f_n$  és  $f$  folytonosak, de a konvergencia nem egyenletes
36. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatai
37. Az  $e^x$  függvény definíciója, monotonitása, értékkészlete, azonosságai
38. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos
39. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit
40. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen is folytonos
41. A kontraktív függvények fixpont-tétele
42. Függvény határértéke (véges hé. véges helyen). A két definíció ekvivalenciája
43. Függvény határértékére (véges hé. véges helyen) vonatkozó műveleti szabályok ( $\times$ ,  $:$ ) és rendőr-elv
44. A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  határérték
45. A  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$  határérték
46. Intervallumon monoton függvény féloldali határértékeinek létezése

**A fenti tételeken kívül definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még a következőket:**

Valós számok, felsőhatár-tulajdonság. Függvény fogalma, függvényműveletek, pontonkénti műveletek, monotonitás, szélsőérték. Távolságfogalom, háromszög-egyenlőtlenség. Környezettulajdonságok. Bernoulli-egyenlőtlenség.

Konvergencia, korlátosság, monotonitás, kapcsolatuk. A konvergencia műveleti szabályai. Indexsorozat, részsorozatok, sorozatok átrendezése és fésűs egyesítése. Műveleti szabályok és egyenlőtlenségi tételek  $\infty$ -divergens sorozatokra. Torlódási pont két definíciója.  $\limsup$ ,  $\liminf$  létezése. Torlódási pont és határérték kapcsolata.

Numerikus sorok konvergenciája és divergenciája. Konvergencia és abszolút konvergencia. hányadoskritérium, Cauchy ekvikonvergencia-tétele. Sorok szorzása, a szorzatsor konvergenciája. Feltételesen konvergens sor pozitív és negatív része, átrendezései. Függvénysorozatok, függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Cauchy-kritérium a pontonkénti és az egyenletes konvergenciára. Folytonos függvények sorozatai. Riemann tétele a konvergens numerikus sorral majorált függvénysorokról.

Függvény monotonitása és az alaplóműveletek kapcsolata. Függvények szimmetriatulajdonságai. A pontbeli folytonosság műveleti szabályai. Intervallumon folytonosság. Egyenletes folytonosság. Féloldali folytonosság. Nevezetes elemi függvények (hatvány-, gyök-, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus) fogalma, tulajdonságai. Az elemi függvények fogalma. A Riemann-féle függvény. Kompakt intervallumon folytonos függvények. Függvény határértéke mind a négy esetben (véges vagy végtelen végesben vagy végtelenben), mindkét definíció. Féloldali határérték. Dinamikus függvényvizsgálat. Szakadási helyek osztályozása. Aszimptoták.

2010. 12. 08. Németh Zoltán