Többváltozós függvények
tételsor, mat. alapszak, 2013/14 őszi félév

A nagyobb lélegzetű tételeknél a hasonló eredmények, bizonyítások közül lehet „választani”.

Többváltozós függvénytan elemei kurzuson:

1. Az $\mathbb{R}^k$ mint skaláris szorzatos és mint normált tér. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség, Minkowsky-egyenlőtlenség

2. Pontsorozatok konvergenciájának általános fogalma (környezetekkel és távolságokkal is)

3. Műveletek nyílt, illetve zárt halmazokkal

4. Koordinátánkénti konvergencia tétele $\mathbb{R}^k$-ban

5. Bolzano–Weierstrass tétel $\mathbb{R}^k$-ban (elég $\mathbb{R}^2$-re bizonyítani), Cantor-tétel $\mathbb{R}^k$-ban

6. Többváltozós függvények folytonossága, a két definíció ekvivalenciája

7. Korlátos zárt halmazon folytonos függvények tulajdonságai (az egyik bizonyítása)

8. $f(X)-f(A)$ előállítása a parciális deriváltakkal. Ha a parc. deriváltak 0-k, a függvény konstans

9. Az irány szerinti differenciálhatóság. Kiszámítása totálisan differenciálható függvény esetén. A gradiensvektor és geometriai jelentése

10. A totális differenciálhatóság. Kapcsolata a folytonossággal, a parciális és az irány szerinti differenciálhatósággal

11. Kétváltozós függvény szélsőértéke. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

12. Kétváltozós függvény szélsőértéke. Elegendő feltételek, a definit és indefinit esetek

13. Többváltozós Taylor-formula

14. Zárt intervallumon folytonos függvény grafikonja, rektifikálható ív 0-mértékűek a síkon

15. Kettős integrál definíciója, alsó és felső összegek viselkedése, összehasonlításuk

16. Szukcesszív integrál normáltartományon. Kettős integrál szukcesszív kiszámítása. A sorrend felcserélhetősége

17. Kettős integrál polártranszformációja. Az $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrál kiszámítása

18. Kettős integrál „geometriai jelentése”, térfogatszámítás. A Viviani-féle test térfogata

19. Vonalintegrál definíciója és alaptulajdonságai

20. A vonalintegrál akkor és csak akkor útfüggetlen, ha van potenciálfüggvény

21. Egzakt differenciálegyenletek

Többváltozós függvények kurzuson:

1. Környezetek, távolság. Norma, skaláris szorzat. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség (általában)

2. Az $\mathbb{R}^k$ tér. Skaláris szorzat, Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség, Minkowsky egyenlőtlenség ($\mathbb{R}^k$-ban)

3. Távolságdefiníciók $\mathbb{R}^k$-ban, kapcsolataik. Koordinátánkénti konvergencia

4. Pontsorozatok konvergenciájának általános fogalma (környezetekkel és távolságokkal is) és tulajdonságai (unicitás, korlátosság ...)

5. Nyílt, zárt, kompakt halmazok. Torlódási pontok, halmaz határa

6. Bolzano–Weierstrass tétel $\mathbb{R}^k$-ban (elég $\mathbb{R}^2$-re bizonyítani). Cantor-tétel

7. Többváltozós függvények folytonossága, a két definíció ekvivalenciája

8. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

9. $f(X)-f(A)$ előállítása a parciális deriváltakkal. Ha a parc. deriváltak 0-k, a függvény konstans

10. Az irány szerinti differenciálhatóság és kiszámítása (totálisan differenciálható függvény esetén). A gradiensvektor és geometriai jelentése

11. A totális differenciálhatóság. Kapcsolata a folytonossággal, a parciális és az irány szerinti differenciálhatósággal

12. Totális differenciálhatóság szükséges és elegendő feltétele skaláris hibataggal. Vektor-vektor függvények differenciálhatósága

13. Totális differenciálhatóság elegendő feltétele (a parciális deriváltak folytonosak)

14. Lokális szélsőérték fogalma, létezésének szükséges feltétele

15. Példák implicit függvényekre: adott egyenletű görbe, adott felületek metszetgörbéjének meredeksége

16. Jordan-mérhetőség és a halmaz határának 0-mértéke

17. A Jordan mérték additív, de nem σ-additív

18. Jordan tétele

19. Példák 0-mértékű halmazokra: kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja, rektifikálható ív a síkon

20. Többszörös (elég a kettős) integrál definíciója, alsó és felső összegek viselkedése, összehasonlításuk. Az oszcillációs kritérium

21. Integrál szukcesszív kiszámítása. A sorrend felcserélhetősége

22. Kettős integrál polártranszformációja. Az $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrál kiszámítása

23. Az integrál „geometriai jelentése”, terület- és térfogatszámítás. A Viviani-féle test térfogata.

24. Vonalintegrál definíciója és alaptulajdonságai. Kiszámítása egyváltozós integrállal

25. A vonalintegrál akkor és csak akkor útfüggetlen, ha van potenciálfüggvény

26. Egzakt és egzakttá tehető differenciálegyenletek. A $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$ és a homogén egyenlet példái

27. A Riemann–Stieltjes integrál fogalma és formális tulajdonságai

28. Monotonitás, korlátos vátozás és folytonosság kapcsolatai, példák

A következőkben szereplő fogalmakat és tételeket mindenkinek ismerni kell, de a bizonyításokat csak a négyes-ötös jegyért.

29. Young tétele a vegyes másodrendű parciális deriváltakról (elég a kétváltozós eset)

30. Lokális szélsőérték fogalma, létezésének elegendő feltétele, a definit és az indefinit esetek

31. Implicitfüggvény-tétel általánosan. Az $f(x, y) = 0$ eset bizonyítása

32. Szukcesszív integrál téglalapon (elég a kétváltozós eset)

33. Kettős integrál affin (lineáris) transzformációja (bizonyítással). Az általános transzformáció

34. A vonalintegrál akkor és csak akkor útfüggetlen, ha $P'_y = Q'_x$

35. Feltételes szélsőérték fogalma; keresése Lagrange-multiplikátorokkal

36. A Riemann–Stieltjes integrálhatóság feltételei

37. Korlátos változású függvények. Monotonitás, korlátos változás és folytonosság kapcsolatai, példák. Teljes változás, felbontási tétel

A fentieken kívül, definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még a következőket is:

Környezettulajdonságok, távolságfüggvény, norma, skaláris szorzat. Topologikus, metrikus, normált és euklidészi terek fogalma és kapcsolataik. Külső, belső, határpontok, nyílt, zárt halmazok. Összefüggő nyílt tartományok, körlánc tétel. Cauchy-kritérium $\mathbb{R}^k$-ban. Az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjesztett valós halmaz és környezetei.

Folytonos függvények tulajdonságai: fokozatos változás, műveletek, összetett függvény. Határérték és imételt határérték, Kapcsolatuk. A határérték műveleti és egyenlőtlenségi tételei.

Öszetett függvény parciális és totális differenciálhatósága. A totális és a parciális differenciálhatóság műveleti szabályai. Magasabbrendű parciális deriváltak. Többváltozós Taylor-formula. Teljes derivált.

Kvadratikus alakok, főtengely-transzformáció, definit jelleg, együttható-feltételek, kétváltozós alakok grafikus képe. Egyszeresen összefüggő tartomány, csillagszerű tartomány fogalma.

Halmaz belseje és lezártja. Jordan-féle mérték felépítése. Halmaz átmérője. Darboux tétel. Jacobi-determináns. Felület felszínének definíciója.

Polár-, gömbi polár- és hengerkoordináta-rendszerek, integráltranszformációk.

A $C[a, b]$ tér és normája. A Riemann- és a Riemann–Stieltjes-féle integrálfogalom felépítése.

Szeged, 2014. november 23.

Németh Zoltán