

Többváltozós függvények

tételek, mat. alapszak, 2012/13 őszi félév

Ahol mást nem mondunk, elég a kétváltozós eset részletes tárgyalása. A nagyon lélegzetű tételknél a hasonló eredmények, bizonyítások közül lehet „választani”.

1. Környezetek, távolság. Norma, skaláris szorzat. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség. (általában)
2. Az \mathbb{R}^k tér. Skaláris szorzat, Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség, Minkowsky egyenlőtlenség (\mathbb{R}^k -ban)
3. Távolságdefiníciók \mathbb{R}^k -ban, kapcsolataik. Koordinátánkénti konvergencia
4. Pontsorozatok konvergenciájának általános fogalma (környezetekkel és távolságokkal is) és tulajdonságai (unicitás, korlátosság ...)
5. Nyílt, zárt, kompakt halmazok. Torlódási pontok, halmaz határa
6. Bolzano–Weierstrass tétel \mathbb{R}^k -ban (elég \mathbb{R}^2 -re bizonyítani). Cantor-tétel
7. Többváltozós függvények folytonossága, a két definíció ekvivalenciája
8. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai
9. $f(X) - f(A)$ előállítása a parciális deriváltakkal. Ha a parciális deriváltak 0-k, a függvény konstans
10. Az irány szerinti differenciálhatóság és kiszámítása (totálisan differenciálható függvény esetén). A gradiensvektor és geometriai jelentése
11. A totális differenciálhatóság. Kapcsolata a folytonossággal, a parciális és az irány szerinti differenciálhatósággal
12. Totális differenciálhatóság szükséges és elegendő feltétele skaláris hibataggal. Vektor-vektor függvények differenciálhatósága
13. Totális differenciálhatóság elegendő feltétele (a parciális deriváltak folytonosak)
14. Young tétele a vegyes másodrendű parciális deriváltakról
15. Lokális szélsőérték fogalma, létezésének szükséges feltétele
16. Példák implicit függvényekre: adott egyenletű görbe, adott felületek metszetgörbéjének meredeksége
17. Jordan-mérhetőség és a halmaz határának 0-mértéke
18. A Jordan mérték additív, de nem σ -additív
19. Jordan tétele
20. Példák 0-mértékű halmazokra: kompakt halmazon folytonos függvény grafikonja, rektifikálható ív a síkon
21. Többszörös (elég a kettős) integrál definíciója, alsó és felső összegek viselkedése, összehasonlításuk. Az oszcillációs kritérium
22. Integrál szukcesszív kiszámítása. A sorrend felcserélhetősége
23. Kettős integrál polártranszformációja. Az $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ integrál kiszámítása
24. Az integrál „geometriai jelentése”, terület- és térfogatszámítás. A Viviani-féle test térfogata

- 25. Vonalintegrál definíciója és alaptulajdonságai. Kiszámítása egyváltozós integrállal
- 26. A vonalintegrál akkor és csak akkor útfüggetlen, ha van potenciálfüggvény
- 27. Egzakttá tehető differenciálegyenletek. A $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$ és a homogén egyenlet példái
- 28. A Green-formula
- 29. A Riemann–Stieltjes integrál fogalma és formális tulajdonságai
- 30. Monotonitás, korlátos változás és folytonosság kapcsolatai, példák

A következőkben szereplő fogalmakat és tételeket mindenkinek ismerni kell, de a bizonyításokat csak a négyes-ötös jegyért.

- 31. Lokális szélsőérték fogalma, létezésének elegendő feltétele, a definit és az indefinit esetek
- 32. Implicitfüggvény-tétel általánosan. Az $f(x, y) = 0$ eset bizonyítása
- 33. Szukcesszív integrál téglalapon (elég a kétváltozós eset)
- 34. A vonalintegrál akkor és csak akkor útfüggetlen, ha $P'_y = Q'_x$
- 35. Feltételes szélsőérték fogalma; keresése Lagrange-multiplikátorokkal
- 36. Kettős Integrál affin (lineáris) transzformációja (bizonyítással). Az általános transzformáció
- 37. A Riemann–Stieltjes integrálhatóság feltételei
- 38. Korlátos változású függvények, teljes változás, felbontási tétel

A fentiekén kívül, definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még a következőket is:

Környezettulajdonságok, távolságfüggvény, norma, skaláris szorzat. Topologikus, metrikus, normált és euklidészi terek fogalma és kapcsolataik. Külső, belső, határpontok, nyílt, zárt halmazok. Összefüggő nyílt tartományok, körlánc tétel. Cauchy-kritérium \mathbb{R}^k -ban. Az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjesztett valós halmaz és környezetei.

Folytonos függvények tulajdonságai: fokozatos változás, műveletek, összetett függvény. Határérték és imélt határérték, Kapcsolatuk. A határérték műveleti és egyenlőtlenségi tételei.

Összetett függvény parciális és totális differenciálhatósága. A totális és a parciális differenciálhatóság műveleti szabályai. Magasabbrendű parciális deriváltak. Kvadratikus alakok, főtengelet-transzformáció, definit jelleg, együttható-feltételek, kétváltozós alakok grafikus képe. Egyszeresen összefüggő tartomány, csillagszerű tartomány fogalma.

Halmaz belseje és lezártja. Jordan-féle mérték felépítése. Halmaz átmérője. Darboux tétel. Jacobi-determináns. Felület felszínének definíciója.

A $C[a, b]$ tér és normája. A Riemann- és a Riemann–Stieltjes-féle integrálfogalom felépítése.

Szeged, 2012. november 29.

Németh Zoltán