

## Differenciál- és integrálszámítás

Tételjegyzék, „emelt szint”

I./mat. alapszak, 2009.

1. Függvények összetételének differenciálhatósága
2. Az  $x^n$ , az  $\sqrt[n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) és az  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) függvények differenciálhatósága
3. Közéérték-tételek
4.  $f$  monotonitásának jellemzése a különbséghányados-függvénnyel és  $f'$  segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (mindkét irányból egyet biz.)
5.  $f$  szélsőértéke jellemzése  $f'$  és  $f''$  segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (mindkét irányból egyet biz.)
6. A deriváltfüggvény Bolzano–Darboux tulajdonsága
7. A L'Hospital-szabályok
8.  $f$  konvexitásának jellemzése  $f''$  segítségével
9. A Newton–Raphson féle gyökkereső módszer és a konvergencia gyorsasága
10. A hatványközepek közötti egyenlőtlenségek; a mértani közép mint határérték
11. A Taylor-formula és hibatagja
12. A Lagrange-féle interpoláció és hibája
13. Példa három alappontos Hermite-féle interpolációra
14.  $e^x$  Taylor-formulája a 0 körül, a hibatag becslése,  $e$  irracionaritása
15. Függvénysorozatok és a differenciálás (példák)
16. A  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  függvények Taylor-sorai (előállítják-e a függvényt?)
17. Az  $\arctg x$  Taylor-sora. A  $\pi$  közelítései
18. Példa függvényre, melyet a Taylor-sora nem állít elő
19. Helyettesítéses és parciális integrálás formulái primitív függvényre
20. Racionalizáló helyettesítések. Az  $R(\sin x, \cos x)$  alakú függvények primitív függvénye
21. Rekurzív formulák. Az  $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ ,  $\sin^n x$  és  $\cos^n x$  primitív függvényei
22. Az alsó és felső összegek viselkedése a beosztás sűrítésekor, összehasonlításuk
23. Az  $\int_0^1 x^2 dx$ ,  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$  kiszámítása definíció szerint (csak az egyik)
24. Az oszcillációs kritérium
25. Az
$$f(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
függvény integrálhatósága
26. A folytonos függvények integrálhatók
27. A Newton–Leibniz formula
28. Az  $[a, b]$ -n integrálható függvény  $[c, d] \subseteq [a, b]$ -n is integrálható. Az integrál intervallum szerinti additivitása
29. Az integrál linearitása (konstansszoros és összeg integrálhatósága és integrálja)
30. Integrálható és folytonos függvény összetételének integrálhatósága
31. Integrálható függvény abszolútértékének integrálhatósága és az integrál becslése
32. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-féle egyenlőtlenség
33. Az integrálszámítás közéérték-tétele
34. Az integrálfüggvény differenciálhatósága

35. Függvénysorozatok és az integrálhatóság (példák)
36. Egyenletesen konvergens függvénysorozatok integrálhatósága
37. Az improprius integrál definíciójának alapesetei. Példák
38. Az  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  integrál viselkedése
39. Az  $\frac{1^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$  sorozat határértéke
40. Az  $\int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} dx$  integrál
41. A (sorokra vonatkozó) integrálkritérium
42. Görbeív alatti terület ( $y = f(x)$  és  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  alakban is); zárt görbe területe
43. Rektifikálható görbe ívhossza, az ívhossz általános fogalma és tulajdonságai
44. Ívhossz kiszámítása ( $y = f(x)$  és  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  alakban is)
45. A korlátozott növekedés differenciálegyenlete
46. Elsőrendű lineáris és Bernoulli-féle differenciálegyenletek
47. Az  $y' = f(y/x)$  és az  $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$  alakú differenciálegyenletek
48. Lineáris függőség és a Wronsky determináns
49. Homogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek általános megoldása
50. Inhomogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek (az általános megoldás szerkezte; a konstans-variáció módszere)

Ahol a tételhez több állítás tartozik, elég az egyiket bizonyítani.

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

Differenciálhatóság fogalma, kapcsolata a folytonossággal, a differenciálhányados geometriai jelentése. A differenciálás műveleti szabályai, elemi függvények deriváltjai. A konvexitás definíciói; a konvexitás jellemzése a különbségihányados-függvények segítségével, a konvexitás jellemzése  $f'$  segítségével; hatványközepek és a közöttük lévő egyenlőtlenségek; a Newton–Raphson féle gyökkereső módszer konvergenciájának gyorsasága. A primitiválhatóság (szüks./elég.) feltételei. A primitív függvény keresésének módszerei. integrálközelítő összegek; alsó és felső integrál, Riemann-integrálhatóság. Riemann-összegek, Darboux tétele, Riemann-féle definíció. Monoton függvények integrálhatósága.  $\int_b^a f$  és  $\int_a^b f$  definíciója. Az integrálfüggvény folytonossága. Integrálhatóság és primitiválhatóság kapcsolata. Az improprius integrál általános fogalma. Cauchy-kritérium és majoráns kritérium improprius integrálra. Simpson-formula.

Területfüggvény tulajdonságai. Görbeív, paraméteres előállítás. Zárt görbe területe. Felület felszínének definíciója. Forgástest térfogata és palástfelszíne.

Differenciálegyenlet, iránymező, általános és szinguláris megoldás. Halastó-feladat. Lineáris differenciálegyenletek, lineáris függőség. Konstans együtthatós és Euler-féle differenciálegyenlet megoldásbázisa. Egzisztencia- és unicitástétel. Laplace-transzformáció.