

## Differenciál- és integrálszámítás

Tételjegyzék „alapszint”

I./mat. alapszak, 2007.

1. Pontbeli differenciálhatóság, kapcsolata a folytonossággal (példák)
2. Függvény inverzének differenciálhatósága (példák: arcsin, arccos)
3. Az  $\sqrt[n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) függvény differenciálhatósága; az  $(f(x))^{(g(x))}$  típusú függvények differenciálhatósága
4. Közéérték-tételek (A Lagrange-tétel biz.) Az „integrálszámítás alaptétele”
5.  $f$  monotonitásának jellemzése  $f'$  segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (az egyik állítás bizonyítása)
6.  $f$  szélsőértékének jellemzése  $f'$ , ill.  $f''$  segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (az egyik állítás bizonyítása)
7. A L'Hospital-szabályok (bizonyítás nélkül). Példák:  $x^n e^{-x}$  ( $x \rightarrow \infty$ );  $\frac{\ln^n x}{x}$  ( $n \rightarrow \infty$ );  $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  ( $x \rightarrow \infty$ );  $\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  ( $x \rightarrow 0$ )
8. Példák olyan függvénysorozatokra, ahol  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  differenciálható, de  $f$  nem; illetve  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  és  $f$  differenciálhatók, de  $f'_n \not\rightarrow f'$
9. Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága (biz. nélkül); alkalmazások:  $\sum n(n+2)x^n$  összegfüggvénye,  $\sum \frac{n(n+2)}{3^n}$  összegének meghatározása
10. A Taylor-formula
11. A  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$  függvények Taylor-sorai
12. Egy függvény primitív függvényei csak konstansban különböznek
13. Helyettesítéssel való integrálás formulája primitív függvényre
14. Parciális integrálás formulája primitív függvényre
15. Rekurzív formulák. A  $\sin^n x$ ,  $\cos^n x$ ,  $\frac{1}{(1+x^2)^n}$  függvények primitív függvényei (az egyik részletesen)
16. Racionalizáló helyettesítések. Az  $R(\sin x, \cos x)$  alakú függvények primitív függvénye
17. Az alsó és felső összegek (viselkedésük a beosztás sűrítésekor; összehasonlításuk)
18. Az alsó és felső integrálok definíciója, összehasonlításuk. A Riemann-féle integrál
19.  $\int_0^1 x dx$  kiszámítása definíció szerint
20. Az oszcillációs kritérium
21. Integrálható függvények szorzatának és hányadosának integrálhatósága
22. Integrálható függvény abszolútértékének integrálhatósága és az integrál becslése
23. A monoton függvények integrálhatók
24. A folytonos függvények integrálhatók
25. Az
$$f(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
függvény integrálhatósága
26. A Newton–Leibniz formula
27. Az integrálfüggvény folytonossága
28. Az integrálfüggvény és a primitív függvény kapcsolata. Példák
29. A parciális és a helyettesítéses integrálás formulái Riemann integrálra
30. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-féle egyenlőtlenség

31. Példák olyan függvénysorozatokra, ahol  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  integrálható, de  $f$  nem; illetve  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n$  és  $f$  integrálhatók, de  $\int_a^b f_n \not\rightarrow \int_a^b f$
32. Hatványsor tagonkénti integrálhatósága (biz. nélkül); példa:  $\arctg x$  hatványsora
33. Az improprius integrál definíciójának alapesetei. Példák
34. Az  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  improprius integrál létezése
35. A (pozitív tagú sorokra vonatkozó) integrálkritérium
36. Görbeív alatti terület, zár görbe által határolt terület
37. Forgástest térfogata
38. Rektifikálható görbe ívhossza, az ívhossz kiszámítása
39. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek
40. Bernoulli-féle differenciálegyenletek;  $y' = f(y/x)$  alakú differenciálegyenletek
41. Lineáris függőség és a Wronsky determináns
42. Homogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek megoldáshalmazának szerkezete
43. Konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásainak bázisa
44. Inhomogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

A differenciálhányados fogalma, geometriai jelentése; a differenciálás műveleti szabályai, elemi függvények deriváltjai. A konvexitás fogalma és jellemzése. A Taylor-formula alkalmazásai; a Taylor sor.

A primitív függvény fogalma; a primitiválhatóság (szüks./elégs.) feltételei. A primitív függvény keresésének tanult módszerei.

Integrálközelítő összegek; Riemann-összegek; Darboux tétele. Az integrál linearitása; tulajdonságai. Integrálhatóság részintervallumon,  $\int_b^a f$  és  $\int_a^a f$  definíciója, intervallum szerinti additivitás. Középérték-tétel. Improprius integrál általános fogalma. Cauchy-féle és majoráns kritériumok improprius integrálra.

Terület, ívhossz, forgástest térfogata és palástfelszíne fogalma és kiszámításuk ( $y = f(x)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $r = r(\varphi)$  alakban adott görbék esetei).

Differenciálegyenlet, iránymező, általános és szinguláris megoldás. Szeparábilis differenciálegyenletek. Lineáris függőség. A differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitástétele.

2007. május 12.

Bartha Mária, Németh Zoltán