

Tételjegyzék
Differenciál- és integrálszámítás

2013/14, tavaszi félév, I. évf. matematika alapszak, nappali)

1. Függvény inverzének differenciálhatósága (példák: arcsin, arccos)
2. Függvények összetételének differenciálhatósága
3. Az x^n , az $\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$) és az x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) függvények differenciálhatósága
4. Közéérték-tételek (elég a Lagrange-alak)
5. f monotonitásának jellemzése a f' segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (mindkét irányból egyet biz.)
6. f szélsőértéke jellemzése f' és f'' segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (mindkét irányból egyet biz.)
7. A L'Hospital-szabályok
8. f konvexitásának jellemzése f'' segítségével
9. A Taylor-formula és hibatagja
10. Függvénysorozatok és a differenciálás (példák)
11. A \sin , \cos , e^x , $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ függvények Taylor-sorai (előállítják-e a függvényt?)
12. Helyettesítéses és parciális integrálás formulái primitív függvényre
13. Racionalizáló helyettesítések. Az $R(\sin x, \cos x)$ alakú függvények primitív függvénye
14. Rekurzív formulák. Az $\frac{1}{(1+x^2)^n}$, $\sin^n x$ és $\cos^n x$ primitív függvényei
15. Az alsó és felső összegek viselkedése a beosztás sűrítésekor, összehasonlításuk
16. Az oszcillációs kritérium
17. A folytonos függvények integrálhatók
18. A monoton függvények integrálhatók
19. A Newton–Leibniz formula
20. Az $[a, b]$ -n integrálható függvény $[c, d] \subseteq [a, b]$ -n is integrálható. Az integrál intervallum szerinti additivitása
21. Az integrál linearitása (konstansszoros és összeg integrálhatósága és integrálja)
22. Integrálható függvény abszolútértékének integrálhatósága és az integrál becslése
23. Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága
24. Függvénysorozatok és az integrálhatóság (példák)
25. Az improprius integrál definíciójának alapesetei. Példák
26. A (sorokra vonatkozó) integrálkritérium
27. Görbeív alatti terület ($y = f(x)$ és $x = x(t)$, $y = y(t)$ alakban is); zárt görbe területe
28. Ívhossz kiszámítása ($y = f(x)$ és $x = x(t)$, $y = y(t)$ alakban is)
- 29.
30. Homogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek megoldásai
Ahol a tételhez több állítás tartozik, elég az egyiket bizonyítani.

A következőkben szereplő fogalmakat és tételeket mindenkinek ismerni kell, de a bizonyításokat csak a négyes-ötös jegyért.

31. f monotonitásának jellemzése a különbségihányados-függvénnyel és f' segítségével (szüks., ill. elégs. feltételek) (mindkét irányból egyet biz.)
32. A deriváltfüggvény Bolzano–Darboux tulajdonsága
33. A Lagrange-féle interpoláció és hibája
34. Példa függvényre, melyet a Taylor-sora nem állít elő
35. Az
$$f(x) := \begin{cases} 1/q, & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1, q > 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
függvény integrálhatósága
36. Riemann-összegek, Darboux tétele (biz. nélkül), Riemann-féle definíció
37. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-féle egyenlőtlenség
38. Az integrálszámítás középérték-tétele
39. Egyenletesen konvergens függvénysorozatok integrálhatósága
40. Lineáris függőség, Wronsky-determináns
41. Inhomogén lineáris másodrendű differenciálegyenletek (az általános megoldás szerkezete; a konstans-variáció módszere)

A következőkben szereplő fogalmakat, tételeket, bizonyításokat az emelt szinten vizsgázóknak kell ismernie.

42. A hatványközepek közötti egyenlőtlenségek; a mértani közép mint határérték
43. Jensen-egyenlőtlenség
44. A Newton–Raphson féle gyökkereső módszer és a konvergencia gyorsasága
45. Példa három alappontos Hermite-féle interpolációra
46. Az $\arctg x$ Taylor-sora. A π közelítései
47. Az $\int_0^1 x^2 dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ kiszámítása definíció szerint
48. Integrálható és folytonos függvény összetételének integrálhatósága
49. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-féle egyenlőtlenség
50. Az $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integrál viselkedése
51. Az $\frac{1^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ sorozat határértéke
52. Az $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$ integrál
53. Közelítő integrálás, Simpson-formula
54. Rektifikálható görbe ívhossza, az ívhossz általános fogalma és tulajdonságai
55. A korlátozott növekedés differenciálegyenlete

Definíció és tételkimondás szintjén tudni kell még:

Differenciálhatóság fogalma, kapcsolata a folytonossággal, a differenciálhányados geometriai jelentése. A differenciálás műveleti szabályai, elemi függvények deriváltjai. A konvexitás definíciói; a konvexitás jellemzése a különbségihányados-függvények segítségével, a konvexitás jellemzése f' segítségével. Hatványközepek és a közöttük lévő egyenlőtlenségek; a Newton–Raphson féle gyökkereső módszer konvergenciájának gyorsasága. A primitiválhatóság (szüks./elégs.) feltételei. A primitív függvény keresésének módszerei. integrálköze-lítő összegek; alsó és felső integrál, Riemann-integrálhatóság. Monoton függvények integ-rálhatósága. $\int_b^a f$ és $\int_a^a f$ definíciója. Az integrálfüggvény folytonossága. Integrálhatóság és primitiválhatóság kapcsolata. Az improprius integrál általános fogalma. Cauchy-kritérium és majoráns kritérium improprius integrálra. Területfüggvény tulajdonságai. Görbeív, pa-raméteres előállítás. Zárt görbe területe. Forgástest térfogata és palástfelszíne. Differenci-álegyenlet, iránymező, általános és szinguláris megoldás. Halastó-feladat. Szétválasztható változójú és homogén differenciálegyenletek Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Li-neáris függőség. Konstans együtthatós és Euler-féle differenciálegyenlet megoldásbázisa.

2014. május 04.

Németh Zoltán