

**Tételjegyzék**  
**Bevezetés az analízisbe**

2013/14 őszi félév, I. évf. matematika alapszak, nappali)

A következőkben szereplő fogalmakat, tételeket, bizonyításokat mindenkinek ismernie kell.

1. A Cantor-tétel (bizonyítása a felsőhatár-tulajdonságból)
2. Monoton, korlátos sorozat konvergens
3. Konvergens sorozatok konstansszorosára és összegére vonatkozó tételek
4. Konvergens sorozatok egyenlőtlenségi tételei (ha  $a_n \geq b_n$ , ill. ha  $a > b$ )
5. A rendőr-elv
6. Az  $(\frac{1}{n^\alpha})$  ( $\alpha \geq 1$ ) és a  $(q^n)$ ; sorozatok konvergenciája
7. Az  $(1 + \frac{1}{n})^n$  és az  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  sorozatok konvergenciája
8. Az  $(\sqrt[n]{n})$  és a  $(\sqrt[n]{a})$  sorozatok konvergenciája
9. A  $\infty$ -divergens sorozatok. Műveletek  $\infty$ -divergens sorozatokkal
10. A  $\sum q^n$ ,  $\sum \frac{1}{n}$ ,  $\sum \frac{1}{n^2}$  sorok konvergenciájának vizsgálata (definíció szerint)
11. A Cauchy-kritérium sorokra. Az  $a_n \rightarrow 0$  szükséges feltétel
12. Műveletek konvergens sorokkal. Linearitás, csoportosíthatóság
13. A gyökkritérium (mindhárom alakja)
14. A majoránskritérium
15. Leibniz-féle kritérium. Az  $|s_n - s|$  becslése
16. A Cauchy–Hadamard tétel
17. Példák: hatványsor konvergenciaviselkedése a konvergencia-intervallum végpontjaiban
18. Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája a konvergencia-intervallum belsejében. Az összegfüggvény folytonos
19. Függvény folytonossága, a két definíció ekvivalenciája
20. Folytonos függvények szorzata és hányadosa
21. Folytonos függvények összetétele és inverze
22. Intervallumon folytonos függvény Bolzano–Darboux tulajdonsága
23. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos
24. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi szélsőértékeit
25. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen is folytonos
26. Függvény határértéke (véges hé. véges helyen). A két definíció ekvivalenciája
27. Függvény határértékére (véges hé. véges helyen) vonatkozó műveleti szabályok ( $\times$ ,  $:$ ) és rendőr-elv
28. A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  határérték
29. A  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$  határérték

A következőkben szereplő fogalmakat és tételeket mindenkinek ismerni kell, de a bizonyításokat csak a négyes-ötös jegyért.

30. A számtani és mértani közepek tétele
31. Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel
32. Az  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$  sorozat konvergenciája
33. Az  $(\frac{n}{2^n})$  sorozat konvergenciája
34. Bolzano–Weierstrass tétel (monoton részsorozat létezése és/vagy intervallumfelezés)
35. Cauchy-féle kritérium sorozatokra
36. A torlódási pontok között van legnagyobb és legkisebb
37. Abszolút konvergens sor átrendezeit
38. Példák feltételesen konvergens sor különböző átrendezeitre
39. Példák olyan függvénysorozatokra, ahol  $f_n \rightarrow f$ , és  $f_n$  folytonos,  $f$  nem; illetve  $f_n$  és  $f$  folytonosak, de a konvergencia nem egyenletes
40. Folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatai
41. Intervallumon monoton függvény féloldali határértékeinek létezése

A következőkben szereplő fogalmakat, tételeket, bizonyításokat az emelt szinten vizsgázóknak kell ismernie.

42. Kör területének kétoldali közelítése rekurzív sorozatokkal; a sorozatok konvergenciája
43.  $\sigma_n := \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \dots + s_n)$  konvergenciája
44. A  $\sqrt[n]{n!}/n$  sorozat,  $\sqrt[n]{n!}$  közelítése
45. Cauchy ekvikonvergencia-tétele
46. A Dirichlet-féle kritérium
47. A Cauchy-féle szorzatsor. Mertens tétele
48. Az  $e(x) := \sum \frac{x^n}{n!}$  függvény:  $e(1) = e$ ;  $e(x_1 + x_2) = e(x_1)e(x_2)$
49. A kontraktív függvények fixpont-tétele
50. Az órákon tárgyalt feladatok, eredmények

**A fenti tételeken kívül definíció és tételkimondás szintjén (tehát bizonyítás nélkül) tudni kell még a következőket:**

Valós számok, felsőhatár-tulajdonság. Függvény fogalma, függvényműveletek, pontonkénti műveletek, monotonitás, szélsőérték. Távolságfogalom, háromszög-egyenlőtlenség. Környezettulajdonságok. Bernoulli-egyenlőtlenség.

Konvergencia, korlátosság, monotonitás, kapcsolatuk. A konvergencia műveleti szabályai. Indexsorozat, részsorozatok, sorozatok átrendezeit és fésűs egyesítése. Műveleti szabályok és egyenlőtlenségi tételek  $\infty$ -divergens sorozatokra. Torlódási pont két definíciója.  $\limsup$ ,  $\liminf$  létezése. Torlódási pont és határérték kapcsolata.

Numerikus sorok konvergenciája és divergenciája. Konvergencia és abszolút konvergencia. Hányadoskritérium, Cauchy ekvikonvergencia-tétele. Sorok szorzása, a szorzatsor konvergenciája. Feltételesen konvergens sor pozitív és negatív része, a sor átrendezései. Függvénysorozatok, függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Cauchy-kritérium a pontonkénti és az egyenletes konvergenciára. Folytonos függvények sorozatai. Riemann tétele a konvergens numerikus sorral majorált függvénysorokról.

Függvény monotonitása és az alpműveletek kapcsolata. Függvények szimmetriatulajdonságai. A pontbeli folytonosság műveleti szabályai. Intervallumon folytonosság. Egyenletes folytonosság. Féloldali folytonosság. Nevezetes elemi függvények (hatvány-, gyök-, exponenciális, logaritmus, trigonometrikus) fogalma, tulajdonságai. Az elemi függvények fogalma. A Riemann- és a Dirichlet-féle függvények. Kompakt intervallumon folytonos függvények. Függvény határértéke mind a négy esetben (véges vagy végtelen végesben vagy végtelenben), mindkét definíció. Féloldali határérték. Dinamikus függvényvizsgálat. Szakadási helyek osztályozása. Aszimptoták.

2013. 12. 03. Németh Zoltán