A $\sin n$ sorozat torlódási pontjairól

A bevezető analízis egyik „jól ismert” feladata:

Igazoljuk, hogy a $\sin n$ *sorozatnak a* $[-1, 1]$ *intervallum minden pontja torlódási pontja.*

(A feladatban lehet sin helyett cos is; más megfogalmazások is lehetségesek, például az, hogy minden $-1 \le a < b \le 1$ esetén van olyan n, amelyre $a < \sin n < b$.)

A „jól ismert” azért idézőjeles, mert bár a feladat sok helyen előkerül (pl. Németh Z., Határérték és folytonosság, Polygon, 2007, 14.10. feladat; Bagota M., Németh J., Németh Z., Analízis II feladatgyűjtemény, 2004, 19-20. feladatok; Középiskolai Matematikai Lapok, 2004, B.3470 feladat (spec. eset); stb.), egyszerű, elemi bizonyítást nem mindenütt találunk. Jelen írás célja egy ilyen bizonyítás.

Tudjuk, hogy minden $x \neq y$ esetén

$$|\sin x - \sin y| < |x - y| \qquad (\text{és hasonlóan } \ |\cos x - \cos y| < |x - y|),$$

hiszen $|\sin x - \sin y| = |2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}|$. Elegendő tehát azt belátnunk, hogy bármely x szöghöz és bármely $\varepsilon > 0$ hibához találhatók olyan n és k egészek, amelyekre

$$(*) \qquad |n + 2k\pi - x| < \varepsilon.$$

Ha arra gondolunk, hogy a π irracionális, szemléletesen eléggé világos, hogy a 2π kerületű egységkörön mindig egységnyit lépkedve, az érintett pontok sosem esnek egybe és előbb-utóbb tetszőlegesen sűrűn bejárják a kerületet. Ezt próbálja szemléltetni a www.math.u-szeged.hu/∼nemeth/download/kor-anim.html lap. De ez persze még nem bizonyítás.

Másrészt, vannak általános tételek, amelyeknek a mi eredményünk csak speciális esete. Kronecker egy (igen mély) tétele szerint minden α irracionális szám esetén az $\{n + m\alpha : n, m \in \mathbb{Z}\}$ halmaz az $\mathbb{R}$ számegyenesen mindenütt sűrű (azaz minden $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$ számokhoz találhatók olyan n és m egész számok, amelyekre $c < n + m\alpha < d$ teljesül). Ebből a $(*)$ állítás azonnal következik.

Fogjunk most már hozzá a $(*)$ egyenlőtlenség igazolásához. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Először az $x = 0$ esetet tárgyaljuk: azt akarjuk belátni, hogy vannak olyan n és k, amelyekre $(*)$ fennáll.

Legyen N akkora, hogy $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Jelöljük meg a számegyenesen a 2π, 4π, 6π, $\ldots$, $2N\pi$ pontokat, majd tekerjük föl a számegyenest egy egységkerületű körre! (Elegánsabban: vegyük a számok törtrészét.) Két megjelölt pont a föltekerés után sem fog egybeesni, hiszen ez azt jelentené, hogy $2i\pi - 2j\pi = \ell$, azaz ekkor π racionális lenne; tehát a kerületet az N darab különböző pont N ívre osztja, a skatulyaelv szerint van közöttük legfeljebb $\frac{1}{N}$ hosszú. Ez azt jelenti, hogy

$$\left|2i\pi - 2j\pi + n\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Az általános esetben legyen x tetszőleges, és legyenek p, q olyan egészek, amelyekre

$$0 < |p + 2q\pi| < \varepsilon$$

(az előző szakaszban láttuk, hgoy ilyenek vannak; és π irracionalitása miatt nem lehet $p + 2q\pi$ nem lehet 0).

Legyen N az $\frac{x}{p+2q\pi}$ szám alsó (vagy fölső) egészrésze; nyilván igaz, hogy

$$\left|N - \frac{x}{p + 2q\pi}\right| < 1,$$

de ebből

$$\left|Np + 2Nq\pi - x\right| < \varepsilon$$

adódik, ami éppen a bizonyítandó $(*)$ egyenlőtlenség (az $n := Np$, $k := Nq$ jelöléssel).

Ezzel az állításunkat beláttuk.