Osztozkodások

Németh Zoltán

SZTE Bolyai Intézet

2011. november 23.

Móra Ferenc: Osztozkodások (1923)

. . .
– Felibe rakja kend szét, sógor – szólal meg a körtefejű. – Egy ide, egy oda, az a legtisztább munka.
– No jó – harákol az öreg –, de hát melyikön kezdjem?
– Kezdje kend a nagyján, a kékön.
A "kék" a huszonötezer koronás. Nevét, számát nem tudják. Rendes embernek soha az életben nem volt dolga ekkora számmal.
. . .
Utoljára maradnak az ötvenezresek.
Az öreg sógor a két ujja közé csíp egyet belőlük.
– Hát ez a kis vörös? Ez ugyan miféle?
– Ez új találvány – káromkodik a körtefejű. – Ez talán nem is péz.
. . .
– Az mán mindegy, hallod. Ha a javát mögfeleztük, ezt is csak elosszuk.
Tíz-tíz darab jutott a kis vörösbül mind a kettőnek, egy darab meg páratlan maradt. Hát most már mi lesz ezzel az árvával?
. . .
– Mölyik a huszonötezrös?
– A nagy kék.
– Értöm – biccent rá az öreg. – No hoci, öcsém, egy kéket, oszt lögyön a tied a vörös.
A körtefej heves ingásba jön.
– Azt az egyet nem töszöm, sógor. Ha kendnek nem jó, neköm se jó. Csökélylöm.

Hogyan osztozkodjunk?

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Hogyan osztozkodjunk?

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Egy módszer:
$n = 2$ Aladár oszt, Béla választ.

Hogyan osztozkodjunk?

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Egy módszer:
$n = 2$ Aladár oszt, Béla választ.
$n = 3$ Aladár és Béla elosztják egymás közt a pizzát. Ezután mindketten háromfelé osztják a maguk darabját, és Csaba választhat egy-egy darabot mindkettejüktől.

Hogyan osztozkodjunk?

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Egy módszer:
$n = 2$ Aladár oszt, Béla választ.
$n = 3$ Aladár és Béla elosztják egymás közt a pizzát. Ezután mindketten háromfelé osztják a maguk darabját, és Csaba választhat egy-egy darabot mindkettejüktől.
$n = 4$ Aladár, Béla és Csaba elosztják egymás közt a pizzát. Ezután mindhárman négyfelé osztják a maguk darabját, és Dezső választhat egy-egy darabot mindhármójuktól.
$n = 5, 6, \ldots$ és így tovább ... (azaz teljes indukció).

Hogyan osztozkodjunk?

Egy másik módszer, ebben kevesebbet kell darabolgatni:

Hogyan osztozkodjunk?

Egy másik módszer, ebben kevesebbet kell darabolgatni:
Aladár odateszi valahova a kést (de nem vág!) és azt mondja, neki elég ez a darab.
A többiek sorban jóváhagyják, vagy nem.
Ha mindenki jóváhagyja, Aladár levághatja magának a vállalt darabot.

Hogyan osztozkodjunk?

Egy másik módszer, ebben kevesebbet kell darabolgatni:
Aladár odateszi valahova a kést (de nem vág!) és azt mondja, neki elég ez a darab.
A többiek sorban jóváhagyják, vagy nem.
Ha mindenki jóváhagyja, Aladár levághatja magának a vállalt darabot.
Ha valaki nem hagyja jóvá, köteles csökkenteni a levágandó részt és elvállalni saját maga számára.

Hogyan osztozkodjunk?

Egy másik módszer, ebben kevesebbet kell darabolgatni:
Aladár odateszi valahova a kést (de nem vág!) és azt mondja, neki elég ez a darab.
A többiek sorban jóváhagyják, vagy nem.
Ha mindenki jóváhagyja, Aladár levághatja magának a vállalt darabot.
Ha valaki nem hagyja jóvá, köteles csökkenteni a levágandó részt és elvállalni saját maga számára.
Akik már Aladárnak is odaadtak volna egy nagyobb részt, ezt nem sokallhatják. A többiek pedig sorban jóváhagyják (vagy nem) ...
Akár így, akár úgy, végül egyvalaki elvihet egy részt úgy, hogy mindenki jóváhagyta $\Rightarrow$ eggyel kevesebben vannak, és így tovább.

A mértékfüggvény

Nem mindenki szereti egyformán a pizza minden összetevőjét :-)

A mértékfüggvény

Nem mindenki szereti egyformán a pizza minden összetevőjét :-)
Jelölje az egész pizzát (mint ponthalmazt) X, és az $A \subseteq X$ részhalmazaihoz rendeljük hozzá az $m(A)$ valós számot (ez tehát halmazokon értelmezett, számértékű függvény).

Definíció

A fenti $m(A)$ egy mértékfüggvény, ha

- $m(A) \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$.
- Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Legyen $m(X) = 1$ (ez csak a mértékegység rögzítése).

A mértékfüggvény

Nem mindenki szereti egyformán a pizza minden összetevőjét :-)
Jelölje az egész pizzát (mint ponthalmazt) X, és az $A \subseteq X$ részhalmazaihoz rendeljük hozzá az $m(A)$ valós számot (ez tehát halmazokon értelmezett, számértékű függvény).

Definíció

A fenti $m(A)$ egy mértékfüggvény, ha

- $m(A) \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$.
- Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Legyen $m(X) = 1$ (ez csak a mértékegység rögzítése).
Például a testek tömege vagy töltése is mértékfüggvények.

A feladat még egyszer

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

A feladat még egyszer

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Az előző módszer most is működik, hiszen ha valamit k darabra osztunk, legalább az egyik darab legalább $\frac{1}{k}$ értéket kell hogy képviseljen, akármilyen mértékkel is mérjük.

A feladat még egyszer

A feladat

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Az előző módszer most is működik, hiszen ha valamit k darabra osztunk, legalább az egyik darab legalább $\frac{1}{k}$ értéket kell hogy képviseljen, akármilyen mértékkel is mérjük.

Vagy mégsem?

Az atomos mérték

Az osztozkodás előző módszere most is működik, KIVÉVE az alább vázolt esetet:
Tegyük fel, hogy a pizzán van egy pontszerű olajbogyó; és valaki annyira szereti az olajbogyót, hogy számára ez az egyetlen pont pozitív mértékkel bír.
Például ha Aladár számára $m(O) = \frac{2}{3}$, már kétfelé sem tudják "méltányosan" osztani.

Az atomos mérték

Az osztozkodás előző módszere most is működik, KIVÉVE az alább vázolt esetet: Tegyük fel, hogy a pizzán van egy pontszerű olajbogyó; és valaki annyira szereti az olajbogyót, hogy számára ez az egyetlen pont pozitív mértékkel bír.
Például ha Aladár számára $m(O) = \frac{2}{3}$, már kétfelé sem tudják "méltányosan" osztani.
Az ilyen mértékeket atomos mértékeknek hívjuk.
A fizikában szereplő "tömegpont", "ponttöltés" stb. atomos mértékre vezetnek.

Hogyan osztozzunk?

Mindenesetre, *folytonos* mértékek esetén (még ha azok különbözőek is), van módszerünk a mindenki számára elfogadható osztozkodásra.

Hogyan osztozzunk?

Mindenesetre, *folytonos* mértékek esetén (még ha azok különbözőek is), van módszerünk a mindenki számára elfogadható osztozkodásra.

Vegyük észre, hogy a módszer *nem* garantálja, hogy mindenki megkapja a "neki járó" $\frac{1}{n}$-ed részt; de azt igen, hogy ha ezt mégsem kapná meg, azért csak saját magát okolhatja (még akkor is, ha a többiek esetleg összebeszéltek ellene).

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

Folytonos függvények

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

- ha x közel van a-hoz, $f(x)$ is közel van $f(a)$-hoz.

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

- ha x közel van a-hoz, $f(x)$ is közel van $f(a)$-hoz.
- akárhogyan ad valaki egy hibakorlátot, ha x elég közel van a-hoz, $f(x)$ közelebb van $f(a)$-hoz, mint az adott korlát.

Folytonos függvények

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

- ha x közel van a-hoz, $f(x)$ is közel van $f(a)$-hoz.
- akárhogyan ad valaki egy hibakorlátot, ha x elég közel van a-hoz, $f(x)$ közelebb van $f(a)$-hoz, mint az adott korlát.
- bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - a| < \delta$ fennáll, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ is fennáll.

Folytonos függvények

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

- ha x közel van a-hoz, $f(x)$ is közel van $f(a)$-hoz.
- akárhogyan ad valaki egy hibakorlátot, ha x elég közel van a-hoz, $f(x)$ közelebb van $f(a)$-hoz, mint az adott korlát.
- bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - a| < \delta$ fennáll, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ is fennáll.
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; (|x - a| \geq \delta \vee |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Bolzano tétele

Tétel.

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0 > f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ hely, ahol $f(c) = 0$.

Bolzano tétele

Tétel.

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0 > f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ hely, ahol $f(c) = 0$.

A bizonyítás például "az oroszlánfogás módszerével" történhet.
Megfelezzük az $[a, b]$ intervallumot. Ha a felezőpontban f nulla, készen vagyunk;

Bolzano tétele

Tétel.

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0 > f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ hely, ahol $f(c) = 0$.

A bizonyítás például "az oroszlánfogás módszerével" történhet.
Megfelezzük az $[a, b]$ intervallumot. Ha a felezőpontban f nulla, készen vagyunk; ha nem, tekintsük azt a félintervallumot, ahol f előjelet vált. Felezzük meg ezt az intervallumot ...

Bolzano tétele

Tétel.

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0 > f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ hely, ahol $f(c) = 0$.

A bizonyítás például "az oroszlánfogás módszerével" történhet.
Megfelezzük az $[a, b]$ intervallumot. Ha a felezőpontban f nulla, készen vagyunk; ha nem, tekintsük azt a félintervallumot, ahol f előjelet vált. Felezzük meg ezt az intervallumot ... Az egymásba skatulyázott zárt intervallumok közös pontja legyen c. c-hez akármilyen közel a függvényünk negatív és pozitív értékeket is fölvesz; tehát $f(c)$ csak 0 lehet. $\square$
(Persze ebben a formában ez csak egy vázlatos érvelés, de pontosítható.)

Egy fixponttétel

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Egy fixponttétel

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre ÉT $= [a, b]$, ÉK $\subseteq [a, b]$.

Egy fixponttétel

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre ÉT $= [a, b]$, ÉK $\subseteq [a, b]$.
Ha $f(a) = a$ vagy $f(b) = b$, készen vagyunk.

Egy fixponttétel

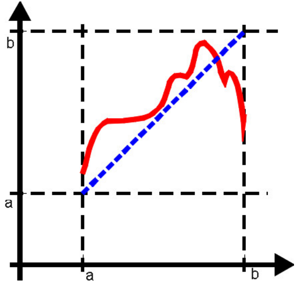
Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre ÉT $= [a, b]$, ÉK $\subseteq [a, b]$.
Ha $f(a) = a$ vagy $f(b) = b$, készen vagyunk.
Ha nem, legyen $g(x) := f(x) - x$. Mivel $g(a) > 0$ és $g(b) < 0$, Bolzano tétele szerint van olyan c, ahol $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$. $\square$

Egy fixponttétel

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre ÉT $= [a, b]$, ÉK $\subseteq [a, b]$.
Ha $f(a) = a$ vagy $f(b) = b$, készen vagyunk.
Ha nem, legyen $g(x) := f(x) - x$. Mivel $g(a) > 0$ és $g(b) < 0$, Bolzano tétele szerint van olyan c, ahol $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$. $\square$



Általánosítás

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Brouwer tétele

Ha a síkon (térben ...) egy korlátos, zárt, konvex halmazt (körlap/gömb, téglalap/téglatest, ...) folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Általánosítás

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

Brouwer tétele

Ha a síkon (térben ...) egy korlátos, zárt, konvex halmazt (körlap/gömb, téglalap/téglatest, ...) folytonosan önmagába képezünk, mindig van olyan pont, amely helyben marad.

A feltételek fontosak. Ha egy lyukas középpontú körlapot elforgatunk, nincs fixpont, de a halmaz nem konvex. Az $f(x) := \frac{1+x}{2}$ a $(0,1)$-et önmagába képezi és nincs fixpontja, de az intervallum nem zárt.

Alkalmazások

- Ha a sík egy darabjáról készítünk egy (akár torz, de) folytonos térképet, és azt valahogy elhelyezzük (akár meggyűrve) az adott területen, biztosan lesz fixpont; oda szúrhatjuk az "itt áll ön" táblát.

Alkalmazások

- Ha a sík egy darabjáról készítünk egy (akár torz, de) folytonos térképet, és azt valahogy elhelyezzük (akár meggyűrve) az adott területen, biztosan lesz fixpont; oda szúrhatjuk az "itt áll ön" táblát.
- Nem lehet rendesen megkeverni egy pohár koktélt; lesz helyben maradó pont.

Alkalmazások

- Ha a sík egy darabjáról készítünk egy (akár torz, de) folytonos térképet, és azt valahogy elhelyezzük (akár meggyűrve) az adott területen, biztosan lesz fixpont; oda szúrhatjuk az "itt áll ön" táblát.
- Nem lehet rendesen megkeverni egy pohár koktélt; lesz helyben maradó pont.

Az átellenes pontok tétele

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Az átellenes pontok tétele

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.

Az átellenes pontok tétele

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.

Az átellenes pontok tétele

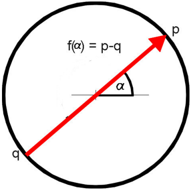
Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.
Ha $f(\alpha) > 0$, $f(\alpha + 180°) < 0$, mert a végpont és a kezdőpont szerepet cseréltek; mivel f folytonos, Bolzano tétele szerint valahol felveszi a 0 értéket is. $\square$

Az átellenes pontok tétele

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

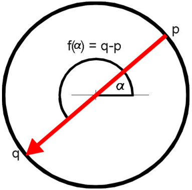
Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.
Ha $f(\alpha) > 0$, $f(\alpha + 180°) < 0$, mert a végpont és a kezdőpont szerepet cseréltek; mivel f folytonos, Bolzano tétele szerint valahol felveszi a 0 értéket is. $\square$



Az átellenes pontok tétele

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.
Ha $f(\alpha) > 0$, $f(\alpha + 180°) < 0$, mert a végpont és a kezdőpont szerepet cseréltek; mivel f folytonos, Bolzano tétele szerint valahol felveszi a 0 értéket is. □



A dátumválasztó

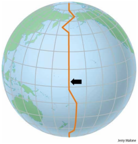
A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük).

A dátumválasztó

A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.

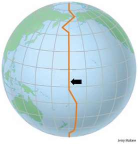
A dátumválasztó

A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.



A dátumválasztó

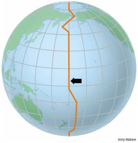
A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.



Ha Tonga szigetéről hétfőn reggel 8-kor felszáll a repülőnk, kétórás út után, vasárnap délelőtt 10-kor érünk Samoára.

A dátumválasztó

A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.



Ha Tonga szigetéről hétfőn reggel 8-kor felszáll a repülőnk, kétórás út után, vasárnap délelőtt 10-kor érünk Samoára.
Magellán (pontosabban Pigafetta), 1522 július 9; Phileas Fogg, 20 000 GBP.

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

Első feladat

El lehet-e osztani egy pizzát egy egyenes vágással úgy, hogy a kerület és a terület is feleződjék?

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

Első feladat

El lehet-e osztani egy pizzát egy egyenes vágással úgy, hogy a kerület és a terület is feleződjék?

A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított egyenest a kerületet felező "átellenes" pontba, és legyen

$$f(P) := \text{bal oldali terület} - \text{jobb oldali terület}.$$

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

Első feladat

El lehet-e osztani egy pizzát egy egyenes vágással úgy, hogy a kerület és a terület is feleződjék?

A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított egyenest a kerületet felező "átellenes" pontba, és legyen

$$f(P) := \text{bal oldali terület} - \text{jobb oldali terület}.$$

Ez a függvény az átellenes pontokban előjelet vált ($f(P) = -f(P')$), másrészt van olyan átellenes pontpár, ahol $f(P) = f(P')$, itt lesz a keresett egyenes. (animáció!)

Igazságos osztások *létezése*

Második feladat

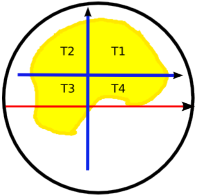
El lehet-e osztani egy pizzát két merőleges vágással négy egyenlő területű részre?

Igazságos osztások *létezése*

Második feladat

El lehet-e osztani egy pizzát két merőleges vágással négy egyenlő területű részre?

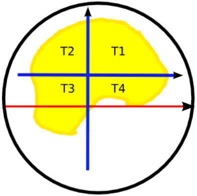
A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt, és húzzuk be az átmérővel párhuzamos és arra merőleges területfelező egyeneseket. (Azt már tudjuk, hogy ilyenek vannak.)



Második feladat

El lehet-e osztani egy pizzát két merőleges vágással négy egyenlő területű részre?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt, és húzzuk be az átmérővel párhuzamos és arra merőleges területfelező egyeneseket. (Azt már tudjuk, hogy ilyenek vannak.)

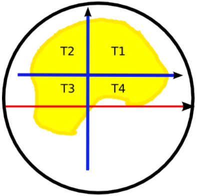


Mivel $T_1 + T_4 = T_2 + T_3$ és $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$, átrendezéssel $T_1 = T_3$ és $T_2 = T_4$.

Második feladat

El lehet-e osztani egy pizzát két merőleges vágással négy egyenlő területű részre?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt, és húzzuk be az átmérővel párhuzamos és arra merőleges területfelező egyeneseket. (Azt már tudjuk, hogy ilyenek vannak.)



Mivel $T_1 + T_4 = T_2 + T_3$ és $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$, átrendezéssel $T_1 = T_3$ és $T_2 = T_4$.

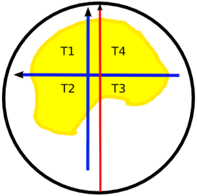
Legyen $f(P) = T_1 - T_2$. Ez a függvény folytonos, és az átmérő negyedfordulatára előjelet vált,

Igazságos osztások *létezése*

Második feladat

El lehet-e osztani egy pizzát két merőleges vágással négy egyenlő területű részre?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt, és húzzuk be az átmérővel párhuzamos és arra merőleges területfelező egyeneseket. (Azt már tudjuk, hogy ilyenek vannak.)



Mivel $T_1 + T_4 = T_2 + T_3$ és $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$, átrendezéssel $T_1 = T_3$ és $T_2 = T_4$.
Legyen $f(P) = T_1 - T_2$. Ez a függvény folytonos, és az átmérő negyedfordulatára előjelet vált, tehát közben valahol 0; itt lesz a keresett vágás.

Igazságos osztások *létezése*

Harmadik feladat

El lehet-e felezni egyszerre két pizzát egyetlen vágással?

Igazságos osztások *létezése*

Harmadik feladat

El lehet-e felezni egyszerre két pizzát egyetlen vágással?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan egyeneseket, melyek külön-külön felezik a pizzákat (ilyen egyenesek vannak). A felező egyenesek az átmérőt az A és a B pontokban metszik.

Igazságos osztások *létezése*

Harmadik feladat

El lehet-e felezni egyszerre két pizzát egyetlen vágással?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan egyeneseket, melyek külön-külön felezik a pizzákat (ilyen egyenesek vannak). A felező egyenesek az átmérőt az A és a B pontokban metszik. Legyen

$$f(P) := \text{az } A \text{ és a } B \text{ koordinátájának különbsége.}$$

Ez a függvény az átellenes pontokban előjelet vált, másrészt van olyan átellenes pontpár, ahol $f(P) = f(P')$; itt lesz a keresett egyenes. (animáció!)

Átellenes pontok még egyszer

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Átellenes pontok még egyszer

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Borsuk–Ulam tétel

Ha egy gömbfelületet folytonosan egy síkba képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

(Magyarul, a gömbfelület minden pontjához egy számpárt rendelünk.)

A sonkásszendvics-tétel

Adott 3 test (a kenyérszeletek, a vaj és a sonkaszelet). Van olyan sík ("egyenes vágás"), amely egyszerre felezi mindhárom test térfogatát.

A sonkásszendvics-tétel

Adott 3 test (a kenyérszeletek, a vaj és a sonkaszelet). Van olyan sík ("egyenes vágás"), amely egyszerre felezi mindhárom test térfogatát.

Bizonyítás.
Vegyük körül a testeket egy elég nagy gömbbel.
A gömb minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan síkokat, amelyek külön-külön felezik a testeket (ilyen síkok vannak). A felező síkok az átmérőt az A, B, C pontokban metszik.

A sonkásszendvics-tétel

Adott 3 test (a kenyérszeletek, a vaj és a sonkaszelet). Van olyan sík ("egyenes vágás"), amely egyszerre felezi mindhárom test térfogatát.

Bizonyítás.
Vegyük körül a testeket egy elég nagy gömbbel.
A gömb minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan síkokat, amelyek külön-külön felezik a testeket (ilyen síkok vannak). A felező síkok az átmérőt az A, B, C pontokban metszik.
Legyen

$$f(P) := (a - b,\ b - c)$$

(a megfelelő pontok koordinátáinak különbségeiből képezett számpár).
A függvény mindkét komponense az átellenes pontokban előjelet vált, másrészt van olyan átellenes pontpár, ahol $f(P) = f(P')$, azaz $A = B = C$; itt lesz a keresett sík.

Házi feladat

Az előadás elején módszert kerestünk, ami elfogadható, de nem biztos, hogy pontos. A végén pontos osztások létezését bizonyítottuk, de ezek megkeresésére nem adtunk módszert.
Az alábbi két feladat egyszerű esetekben megtalálja a felező egyeneseket.

Házi feladat

Az előadás elején módszert kerestünk, ami elfogadható, de nem biztos, hogy pontos. A végén pontos osztások létezését bizonyítottuk, de ezek megkeresésére nem adtunk módszert.

Az alábbi két feladat egyszerű esetekben megtalálja a felező egyeneseket.

1. feladat

Adott egy háromszög. Szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) olyan egyenest, amely valamelyik oldalára merőleges és a területét felezi.

2. feladat

Adott egy háromszög és egy egyenes. Tekintsük az alábbi három állítást:

- Az egyenes felezi a háromszög területét.
- Az egyenes felezi a háromszög kerületét.
- Az egyenes átmegy a háromszögbe írható kör középpontján.

Bizonyítsuk be, hogy ha bármelyik két állítás igaz, akkor a harmadik is igaz.

Köszönöm a figyelmet!

Az előadás anyaga megtalálható itt: www.math.u-szeged.hu/∼nemeth