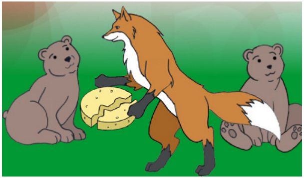
Igazságos osztozkodás

egy régi feladat

Németh Zoltán

SZTE Bolyai Intézet

2014. április 12.



Móra Ferenc: Osztozkodások (1923)

. . .
– Felibe rakja kend szét, sógor – szólal meg a körtefejű. – Egy ide, egy oda, az a legtisztább munka.
– No jó – harákol az öreg –, de hát melyikön kezdjem?
– Kezdje kend a nagyján, a kékön.
A "kék" a huszonötezer koronás. Nevét, számát nem tudják. Rendes embernek soha az életben nem volt dolga ekkora számmal.
. . .
Utoljára maradnak az ötvenezresek.
Az öreg sógor a két ujja közé csíp egyet belőlük.
– Hát ez a kis vörös? Ez ugyan miféle?
– Ez új találvány – káromkodik a körtefejű. – Ez talán nem is péz.
. . .
– Az mán mindegy, hallod. Ha a javát mögfeleztük, ezt is csak elosszuk.
Tíz-tíz darab jutott a kis vörösbül mind a kettőnek, egy darab meg páratlan maradt. Hát most már mi lesz ezzel az árvával?
. . .
– Mölyik a huszonötezrös?
– A nagy kék.
– Értöm – biccent rá az öreg. – No hoci, öcsém, egy kéket, oszt lögyön a tied a vörös.
A körtefej heves ingásba jön.
– Azt az egyet nem töszöm, sógor. Ha kendnek nem jó, neköm se jó. Csökélylöm.

Hogyan osztozkodjunk?

A méltányos osztozkodás feladata

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor . . .). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Hogyan osztozkodjunk?

A méltányos osztozkodás feladata

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Egy módszer:
$n = 2$ Aladár oszt, Béla választ.

Hogyan osztozkodjunk?

A méltányos osztozkodás feladata

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Egy módszer:
$n = 2$ Aladár oszt, Béla választ.
$n = 3$ Aladár és Béla elosztják egymás közt a pizzát. Ezután mindketten háromfelé osztják a maguk darabját, és Csaba választhat egy-egy darabot mindkettejüktől.

Hogyan osztozkodjunk?

A méltányos osztozkodás feladata

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Egy módszer:
$n = 2$ Aladár oszt, Béla választ.
$n = 3$ Aladár és Béla elosztják egymás közt a pizzát. Ezután mindketten háromfelé osztják a maguk darabját, és Csaba választhat egy-egy darabot mindkettejüktől.
$n = 4$ Aladár, Béla és Csaba elosztják egymás közt a pizzát. Ezután mindhárman négyfelé osztják a maguk darabját, és Dezső választhat egy-egy darabot mindkettejüktől.
$n = 5, 6, \ldots$ és így tovább ...(azaz teljes indukció).

Hogyan osztozkodjunk?

Egy másik módszer, ebben kevesebbet kell darabolgatni:

Hogyan osztozkodjunk?

Egy másik módszer, ebben kevesebbet kell darabolgatni:
Aladár odateszi a pizza bal széléhez a kést, és lassan jobbra mozgatja, egészen addig, amíg valaki felkiált: **vágj!** (Aladár is kiálthat.)
A levágott részt az viszi el, aki kiáltott – a többiek ezt nem kifogásolhatják.
Tehát egyvalaki elvihetett egy részt úgy, hogy mindenki jóváhagyta $\Rightarrow$ eggyel kevesebben vannak (azaz teljes indukció).

A mértékfüggvény

Nem mindenki szereti egyformán a pizza minden összetevőjét :-)

A mértékfüggvény

Nem mindenki szereti egyformán a pizza minden összetevőjét :-)
Az egész pizza (mint ponthalmaz) különböző A részhalmazaihoz rendeljük hozzá az $m(A)$ valós számot (ez tehát halmazokon értelmezett, számértékű függvény).

Definíció

A fenti $m(A)$ egy mértékfüggvény, ha

- $m(A) \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$.
- Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

A mértékfüggvény

Nem mindenki szereti egyformán a pizza minden összetevőjét :-)
Az egész pizza (mint ponthalmaz) különböző A részhalmazaihoz rendeljük hozzá az $m(A)$ valós számot (ez tehát halmazokon értelmezett, számértékű függvény).

Definíció

A fenti $m(A)$ egy mértékfüggvény, ha

- $m(A) \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$.
- Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Legyen $m(X) = 1$ (ez csak a mértékegység rögzítése).
Például a testek tömege vagy töltése is mértékfüggvények.

A feladat még egyszer

Méltányos osztozkodás

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor . . .). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

A feladat még egyszer

Méltányos osztozkodás

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Az előző módszerek most is működnek.

Vagy mégsem?

A feladat még egyszer

Méltányos osztozkodás

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Az előző módszerek most is működnek.

Vagy mégsem?
Működnek, KIVÉVE az "atomos mérték" esetét:
Tegyük fel, hogy a pizzán van egy pontszerű olajbogyó; és valaki annyira szereti az olajbogyót, hogy számára ez az egyetlen pont pozitív mértékkel bír.
Például ha Aladár számára $m(O) = \frac{2}{3}$, már kétfelé sem tudják "tisztességesen" osztani.
A fizikából ismert "tömegpont", "ponttöltés" stb. atomos mértékre vezetnek.

A feladat még egyszer

Méltányos osztozkodás

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás során mindenki megkaphassa a neki járó részt, vagy ha mégsem, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Az előző módszerek most is működnek.

Vagy mégsem?
Működnek, KIVÉVE az "atomos mérték" esetét:
Tegyük fel, hogy a pizzán van egy pontszerű olajbogyó; és valaki annyira szereti az olajbogyót, hogy számára ez az egyetlen pont pozitív mértékkel bír.
Például ha Aladár számára $m(O) = \frac{2}{3}$, már kétfelé sem tudják "tisztességesen" osztani.
A fizikából ismert "tömegpont", "ponttöltés" stb. atomos mértékre vezetnek.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a mértékfüggvények folytonosak.

Hogyan osztozzunk?

Mindenesetre, *folytonos* mértékek esetén (még ha azok különbözőek is), van módszerünk a mindenki számára elfogadható osztozkodásra.

Vegyük észre, hogy a módszer *nem* garantálja, hogy mindenki megkapja a "neki járó" $\frac{1}{n}$-ed részt; de azt igen, hogy ha ezt mégsem kapná meg, azért csak saját magát okolhatja (még akkor is, ha a többiek esetleg összebeszéltek ellene).

Folytonos függvények

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

- ha x közel van a-hoz, $f(x)$ is közel van $f(a)$-hoz.

Folytonos függvények

Definíció.
Az f (valós) függvény folytonos értelmezési tartománya egy a belső pontjában, ha

- ha x közel van a-hoz, $f(x)$ is közel van $f(a)$-hoz.
- akárhogyan ad valaki egy hibakorlátot, ha x elég közel van a-hoz, $f(x)$ közelebb van $f(a)$-hoz, mint az adott korlát.
- bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - a| < \delta$ fennáll, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ is fennáll.
- $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, (|x - a| \geq \delta \vee |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Bolzano tétele

Bolzano tétele

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0 > f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ hely, ahol $f(c) = 0$.

Bolzano tétele

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a) > 0 > f(b)$, akkor van olyan $a < c < b$ hely, ahol $f(c) = 0$.

A bizonyítás például "az oroszlánfogás módszerével" történhet.
Megfelezzük az $[a, b]$ intervallumot. Ha a felezőpontban f nulla, készen vagyunk; ha nem, tekintsük azt a félintervallumot, ahol f előjelet vált. Felezzük meg ezt az intervallumot ...
Az egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak van közös pontja, legyen ez c.
c-hez akármilyen közel a függvényünk negatív és pozitív értékeket is fölvesz; tehát $f(c)$ csak 0 lehet. $\square$
(Persze ebben a formában ez csak egy vázlatos érvelés, de pontosítható.)

Egy fixponttétel

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont, azaz olyan pont, amely helyben marad.

Egy fixponttétel

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont, azaz olyan pont, amely helyben marad.

Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre ÉT $= [a, b]$, ÉK $\subseteq [a, b]$.
Ha $f(a) = a$ vagy $f(b) = b$, készen vagyunk.

Egy fixponttétel

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont, azaz olyan pont, amely helyben marad.

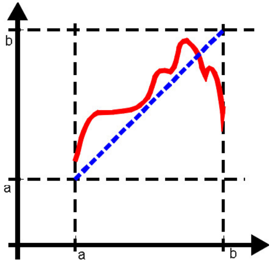
Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre $\text{ÉT} = [a, b]$, $\text{ÉK} \subseteq [a, b]$.
Ha $f(a) = a$ vagy $f(b) = b$, készen vagyunk. Ha nem, legyen $g(x) := f(x) - x$.
Mivel $g(a) > 0$ és $g(b) < 0$, van olyan c, ahol $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$. $\square$

Egy fixponttétel

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont, azaz olyan pont, amely helyben marad.

Bizonyítás.
Tehát az f folytonos függvényre ÉT $= [a, b]$, ÉK $\subseteq [a, b]$.
Ha $f(a) = a$ vagy $f(b) = b$, készen vagyunk. Ha nem, legyen $g(x) := f(x) - x$.
Mivel $g(a) > 0$ és $g(b) < 0$, van olyan c, ahol $g(c) = 0$, azaz $f(c) = c$. □



Az átellenes pontok tétele

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Az átellenes pontok tétele

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

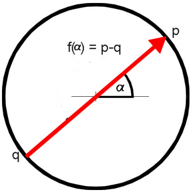
Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.

Az átellenes pontok tétele

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.
Ha $f(\alpha) > 0$, $f(\alpha + 180°) < 0$, mert a végpont és a kezdőpont szerepet cseréltek; mivel f folytonos, valahol felveszi a 0 értéket is. $\square$

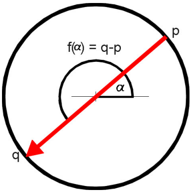


Az átellenes pontok tétele

Bolzano tételét alkalmazzuk.

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Bizonyítás.
Tehát a körvonal minden pontjába írtunk egy számot.
Vegyünk föl egy α szögű irányított átmérőt, és legyen $f(\alpha) :=$ a végpontba írt szám mínusz a kezdőpontba írt szám.
Ha $f(\alpha) > 0$, $f(\alpha + 180°) < 0$, mert a végpont és a kezdőpont szerepet cseréltek; mivel f folytonos, valahol felveszi a 0 értéket is. $\square$



A dátumválasztó

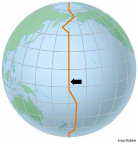
A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük).

A dátumválasztó

A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.

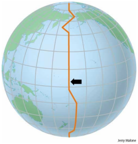
A dátumválasztó

A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.



A dátumválasztó

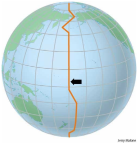
A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.



Ha Tonga szigetéről hétfőn reggel 8-kor felszáll a repülőnk, kétórás út után, vasárnap délelőtt 10-kor érünk Samoára.

A dátumválasztó

A Föld egy szélességi körén (mondjuk az egyenlítőn) minden ponthoz rendeljük hozzá a pontos dátumot és időt (azaz a körvonalat az időegyenesbe képezzük). Ha ez a leképezés folytonos lenne, két átellenes pontban megegyezne az idő, ez pedig nem lehetséges, tehát a leképezés NEM lehet folytonos! A szakadási hely a dátumválasztó vonal.



Ha Tonga szigetéről hétfőn reggel 8-kor felszáll a repülőnk, kétórás út után, vasárnap délelőtt 10-kor érünk Samoára.
Magellán (pontosabban Pigafetta), 1522 július 9; Phileas Fogg, 20 000 GBP.

Általánosítsunk!

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont.

Általánosítsunk!

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont.

Brouwer-féle fixponttétel

Ha a síkon egy háromszöget (a térben egy tetraédert . . .) folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont.

Általánosítsunk!

Ha egy zárt intervallumot folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont.

Brouwer-féle fixponttétel

Ha a síkon egy háromszöget (a térben egy tetraédert . . .) folytonosan önmagába képezünk, mindig van fixpont.

A háromszög (tetraéder . . .) helyett gondolhatunk bármely korlátos, zárt, konvex halmazra is, mert ezek a háromszög (tetraéder . . .) kölcsönösen egyértelmű folytonos képei.

Alkalmazások

- Ha a sík egy darabjáról készítünk egy (akár torz, de) folytonos térképet, és azt valahogy elhelyezzük (akár meggyűrve) az adott területen, biztosan lesz fixpont; oda szúrhatjuk az "itt áll ön" táblát.

Alkalmazások

- Ha a sík egy darabjáról készítünk egy (akár torz, de) folytonos térképet, és azt valahogy elhelyezzük (akár meggyűrve) az adott területen, biztosan lesz fixpont; oda szúrhatjuk az "itt áll ön" táblát.
- Nem lehet rendesen megkeverni egy pohár koktélt; lesz helyben maradó pont.

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

El lehet-e osztani egy pizzát egy egyenes vágással úgy, hogy a kerület és a terület is feleződjék?

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

El lehet-e osztani egy pizzát egy egyenes vágással úgy, hogy a kerület és a terület is feleződjék?

A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított egyenest a kerületet felező "átellenes" pontba, és legyen

$$f(P) := \text{bal oldali terület} - \text{jobb oldali terület}.$$

Igazságos osztások *létezése*

Egy gondos anyuka homogén, de szabálytalan alakú pizzákat készít. (olajbogyó nélkül :-))

El lehet-e osztani egy pizzát egy egyenes vágással úgy, hogy a kerület és a terület is feleződjék?

A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított egyenest a kerületet felező "átellenes" pontba, és legyen

$$f(P) := \text{bal oldali terület} - \text{jobb oldali terület}.$$

Ez a függvény az átellenes pontokban előjelet vált ($f(P) = -f(P')$), másrészt van olyan átellenes pontpár, ahol $f(P) = f(P')$, itt lesz a keresett egyenes. (animáció!)

Igazságos osztások *létezése*

El lehet-e felezni egyszerre két pizzát egyetlen vágással?

Igazságos osztások *létezése*

El lehet-e felezni egyszerre két pizzát egyetlen vágással?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan egyeneseket, melyek külön-külön felezik a pizzákat (ilyen egyenesek vannak). A felező egyenesek az átmérőt az A és a B pontokban metszik.

Igazságos osztások *létezése*

El lehet-e felezni egyszerre két pizzát egyetlen vágással?

A két alakzatot foglaljuk egy elég nagy körbe. A kerület minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan egyeneseket, melyek külön-külön felezik a pizzákat (ilyen egyenesek vannak). A felező egyenesek az átmérőt az A és a B pontokban metszik. Legyen

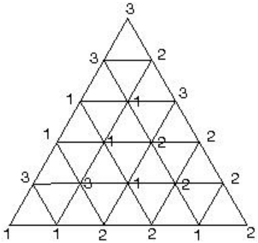
$$f(P) := \text{az } A \text{ és a } B \text{ koordinátájának különbsége.}$$

Ez a függvény az átellenes pontokban előjelet vált, másrészt van olyan átellenes pontpár, ahol $f(P) = f(P')$; itt lesz a keresett egyenes. (animáció!)

Sperner lemma

Sperner-számozás:

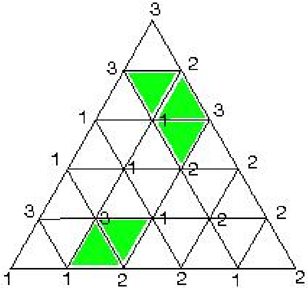
- Egy háromszöget amelyet a határán és a belsejében levő pontokkal kisebb háromszögekre bontunk).
- A nagy háromszög csúcsait az 1, 2, 3 számokkal számozzuk (mindet különbözőre).
- A határ bármelyik oldalára eső csúcsokat csak az oldal csúcsaira írt számok valamelyikével számozzuk.
- A nagy háromszög belsejében lévő csúcsok akármelyik számot kaphatják.



Sperner lemma

Sperner-lemma

A kis háromszögek közül a teljesek (1-2-3 számozottak) száma mindig páratlan; speciálisan legalább 1, azaz VAN ilyen.

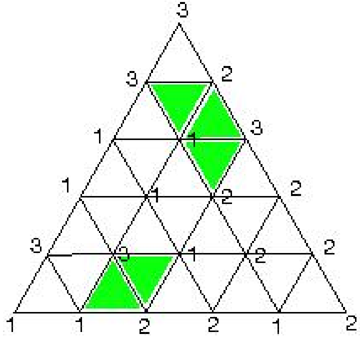


Sperner lemma bizonyítása

Kis háromszögek: szobák. $1-2$ élek: ajtók. Egy szobán 0, 1, vagy 2 ajtó lehet, 1 pontosan akkor, ha teljes $1-2-3$ szoba. A "séták" tehát mindig egyértelműek, soha nem térnek vissza, és csak teljes szobában akadnak el.

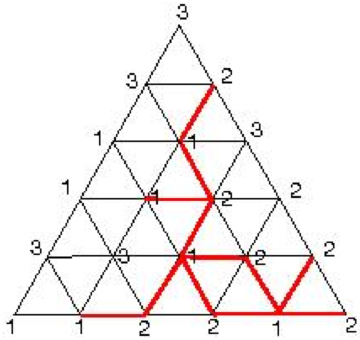
Sperner lemma bizonyítása

Kis háromszögek: szobák. $1-2$ élek: ajtók. Egy szobán 0, 1, vagy 2 ajtó lehet, 1 pontosan akkor, ha teljes $1-2-3$ szoba. A "séták" tehát mindig egyértelműek, soha nem térnek vissza, és csak teljes szobában akadnak el.



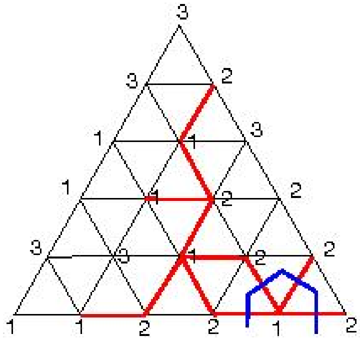
Sperner lemma bizonyítása

Kis háromszögek: szobák. $1-2$ élek: ajtók. Egy szobán 0, 1, vagy 2 ajtó lehet, 1 pontosan akkor, ha teljes $1-2-3$ szoba. A "séták" tehát mindig egyértelműek, soha nem térnek vissza, és csak teljes szobában akadnak el.

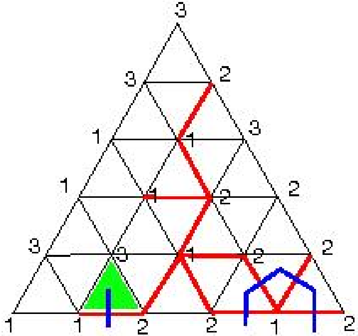


Sperner lemma bizonyítása

Kis háromszögek: szobák. $1-2$ élek: ajtók. Egy szobán 0, 1, vagy 2 ajtó lehet, 1 pontosan akkor, ha teljes $1-2-3$ szoba. A "séták" tehát mindig egyértelműek, soha nem térnek vissza, és csak teljes szobában akadnak el.

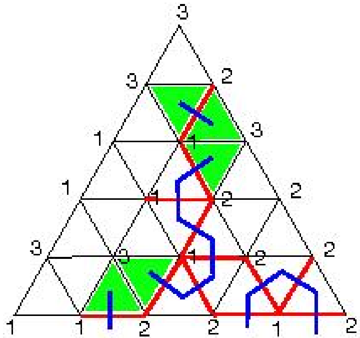


Kis háromszögek: szobák. $1 - 2$ élek: ajtók. Egy szobán 0, 1, vagy 2 ajtó lehet, 1 pontosan akkor, ha teljes $1 - 2 - 3$ szoba. A "séták" tehát mindig egyértelműek, soha nem térnek vissza, és csak teljes szobában akadnak el.

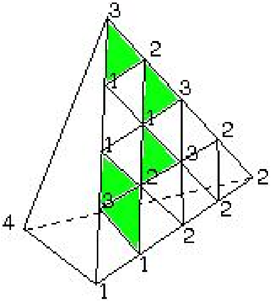


Sperner lemma bizonyítása

Kis háromszögek: szobák. 1 – 2 élek: ajtók. Egy szobán 0, 1, vagy 2 ajtó lehet, 1 pontosan akkor, ha teljes 1 – 2 – 3 szoba. A "séták" tehát mindig egyértelműek, soha nem térnek vissza, és csak teljes szobában akadnak el.



A lemma értelemszerűen kiterjeszthető magasabb dimenziókra is.
Az $1-2$ élen páratlan sok ajtó volt. a $k=3$ esetben az $1-2-3$ háromszögek az ajtók, az $1-2-3$ lapon ilyen páratlan sok van ... Teljes indukció!



A Brouwer-tétel bizonyítása

A síkbeli háromszög esetét részletezzük. Tegyük fel, hogy valamely folytonos leképezésnek nincs fixpontja.

A Brouwer-tétel bizonyítása

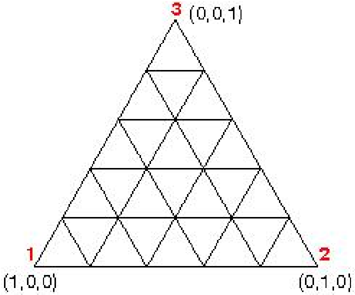
A síkbeli háromszög esetét részletezzük. Tegyük fel, hogy valamely folytonos leképezésnek nincs fixpontja.
Tekintsük a kérdéses háromszöget és a pontjainak affin koordinátáit:
csúcsok: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p} + x_2\mathbf{q} + x_3\mathbf{r}$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

A Brouwer-tétel bizonyítása

A síkbeli háromszög esetét részletezzük. Tegyük fel, hogy valamely folytonos leképezésnek nincs fixpontja.
Tekintsük a kérdéses háromszöget és a pontjainak affin koordinátáit:
csúcsok: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p} + x_2\mathbf{q} + x_3\mathbf{r}$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
a háromszög pontjaira $f(a, b, c) = (a', b', c')$.
A nagy háromszöget háromszögeljük, és a csúcsokat számozzuk így:
Ha $a' < a$, 1; ha $a' \geq a$ és $b' < b$, 2; ha $a' \geq a$, $b' \geq b$ és $c' < c$, 3.
Ez Sperner-számozás! (Csak akkor akadnánk el, ha lenne fixpont.)

A Brouwer-tétel bizonyítása

A síkbeli háromszög esetét részletezzük. Tegyük fel, hogy valamely folytonos leképezésnek nincs fixpontja.
Tekintsük a kérdéses háromszöget és a pontjainak affin koordinátáit:
csúcsok: $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p} + x_2\mathbf{q} + x_3\mathbf{r}$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
a háromszög pontjaira $f(a, b, c) = (a', b', c')$.
A nagy háromszöget háromszögeljük, és a csúcsokat számozzuk így:
Ha $a' < a$, 1; ha $a' \geq a$ és $b' < b$, 2; ha $a' \geq a$, $b' \geq b$ és $c' < c$, 3.
Ez Sperner-számozás! (Csak akkor akadnánk el, ha lenne fixpont.)



A Brouwer-tétel bizonyítása 2.

Sperner-lemma $\Rightarrow$ van teljes háromszög. ezt háromszögeljük tovább ... úgy, hogy a háromszögek átmérője tartson 0-hoz. Cantor-tétel $\Rightarrow$ van közös pont, mondjuk (a, b, c).

A Brouwer-tétel bizonyítása 2.

Sperner-lemma $\Rightarrow$ van teljes háromszög. ezt háromszögeljük tovább ... úgy, hogy a háromszögek átmérője tartson 0-hoz. Cantor-tétel $\Rightarrow$ van közös pont, mondjuk (a, b, c).

Ez a közös pont limese 1-számozott pontok egy sorozatának: $(a_n, b_n, c_n) \to (a, b, c)$, a folytonosság miatt: $(a'_n, b'_n, c'_n) \to (a', b', c')$ és $a'_n < a_n$ miatt $a' \leq a$. Hasonlóan $b' \leq b$, $c' \leq c$, tehát fixpontot találtunk. $\square$

Ismét pizzát osztunk

A megismert osztozkodó algoritmusunkkal Aladár biztosan hozzájuthat a neki járó részhez; de lehet, hogy Béla véletlenül (vagy szándékosan) még nagyobb részt kap a végén.

Ismét pizzát osztunk

A megismert osztozkodó algoritmusunkkal Aladár biztosan hozzájuthat a neki járó részhez; de lehet, hogy Béla véletlenül (vagy szándékosan) még nagyobb részt kap a végén.

Az *irigységmentes* osztozkodás feladata

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor . . .). Vágjuk ezt n részre úgy, hogy minden gyerek kiválaszthassa a neki legértékesebb darabot és azt meg is kaphassa (tehát mindenki különböző darabokat válasszon).
Természetesen minden gyerek a saját (folytonos) mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Ismét pizzát osztunk

A megismert osztozkodó algoritmusunkkal Aladár biztosan hozzájuthat a neki járó részhez; de lehet, hogy Béla véletlenül (vagy szándékosan) még nagyobb részt kap a végén.

Az *irigységmentes* osztozkodás feladata

Van egy pizzánk (sütemény, aranypor ...). Vágjuk ezt n részre úgy, hogy minden gyerek kiválaszthassa a neki legértékesebb darabot és azt meg is kaphassa (tehát mindenki különböző darabokat válasszon).
Természetesen minden gyerek a saját (folytonos) mértékfüggvénye szerint értékeli a pizzát. (Mérőeszközünk nincsen, csak egy tökéletesen éles kés.)

Igazából mértékre sincs szükség. Annyit kell csak föltnnünk, hogy

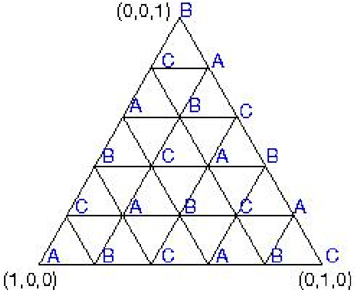
- mindenki éhes, azaz bármelyik nemüres darabot szívesebben választja egy üres darabnál
- ha valaki külöböző felosztások mellett az A_k halmazokat preferálja és ezeknek a halmazoknak a "határhalmaza" A, akkor az A halmazt is preferálja.

Irigységmentes osztozkodás

Legyen $n = 3$, a gyerekek A, B, C.
Legyen a pizza egyik átmérője 1, erre merőlegesen háromba vágjuk: a vágások az átmérőn x_1, x_2, x_3, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ezek tekinthetők "súlyponti koordinátáknak".

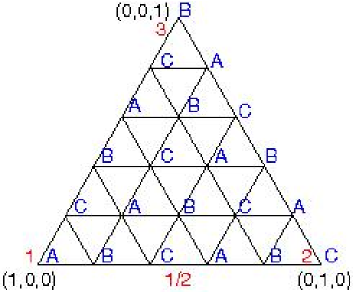
Irigységmentes osztozkodás

Legyen $n = 3$, a gyerekek A, B, C.
Legyen a pizza egyik átmérője 1, erre merőlegesen háromba vágjuk: a vágások az átmérőn x_1, x_2, x_3, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ezek tekinthetők "súlyponti koordinátáknak".
Tekintsünk egy háromszöghálót. Minden pontnak megfelel egy háromba vágás. Címkézzük föl a pontokat:



Irigységmentes osztozkodás

Legyen $n = 3$, a gyerekek A, B, C.
Legyen a pizza egyik átmérője 1, erre merőlegesen háromba vágjuk: a vágások az átmérőn x_1, x_2, x_3, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ezek tekinthetők "súlyponti koordinátáknak".
Tekintsünk egy háromszöghálót. Minden pontnak megfelel egy háromba vágás.
Címkézzük föl a pontokat:



Majd mindegyik csúcsban kérdezzük meg a tulajdonost, melyik darabot kéri.
Ez Sperner-számozás.

irigységmentes osztozkodás 2.

Van teljes háromszög, amit tovább osztunk . . . Az egymásba skatulyázott háromszögeknek van közös pontja (P).

irigységmentes osztozkodás 2.

Van teljes háromszög, amit tovább osztunk ... Az egymásba skatulyázott háromszögeknek van közös pontja (P).
Tehát mondjuk A-pontok egy sorozata tart P-hez. A gyerekek véges sok permutációban választhatnak preferált darabot, így lesz olyan részsorozat, amelyben A (meg B és C is) mindig ugyanazt választják. Preferált halmazok határhalmaza is preferált $\Rightarrow$ a P-nek megfelelő vágás éppen jó.

Van teljes háromszög, amit tovább osztunk . . . Az egymásba skatulyázott háromszögeknek van közös pontja (P).
Tehát mondjuk A-pontok egy sorozata tart P-hez. A gyerekek véges sok permutációban választhatnak preferált darabot, így lesz olyan részsorozat, amelyben A (meg B és C is) mindig ugyanazt választják. Preferált halmazok határhalmaza is preferált $\Rightarrow$ a P-nek megfelelő vágás éppen jó.
Az $n > 3$ esetben a háromszögelés bonyolultabb (súlyvonalakkal kell osztani), de hasonló gondolatmenet és indukció igazolja a tételt. $\square$

osztozkodás jóban-rosszban

Mi a helyzet, ha "rossz" dolgokat kell elosztani? Munkát, fizetnivalót? Vagy jót és rosszat is?

Egy kiadó házban van n különböző szoba. n ember kivenné a házat, és közösen fizetnék a bérletet. Úgy kell elosztani a szobák árát, hogy senki ne akarjon cserélni senkivel.

- A bérleti díj bármely elosztása mellett mindenki preferál legalább egy szobát.
- Mindenki preferál egy ingyen szobát a fizetőshöz képest.
- Ha valaki preferál egy szobát árak egy konvergens sorozata mellett, akkor a árak határértéke mellett is preferálja.

Sperner-típusú gondolatmenettel megmutatható, hogy van ilyen felosztás.

osztozkodás jóban-rosszban

Mi a helyzet, ha "rossz" dolgokat kell elosztani? Munkát, fizetnivalót? Vagy jót és rosszat is?

Egy kiadó házban van n különböző szoba. n ember kivenné a házat, és közösen fizetnék a bérletet. Úgy kell elosztani a szobák árát, hogy senki ne akarjon cserélni senkivel.

- A bérleti díj bármely elosztása mellett mindenki preferál legalább egy szobát.
- Mindenki preferál egy ingyen szobát a fizetőshöz képest.
- Ha valaki preferál egy szobát árak egy konvergens sorozata mellett, akkor a árak határértéke mellett is preferálja.

Sperner-típusú gondolatmenettel megmutatható, hogy van ilyen felosztás.

De az *igazi matematikus* ;-) megoldás: mindenki fizesse be a teljes bérleti díjat – a visszajáró szétosztása már ismert feladat.

És a valóságban?

Világos, hogy ezekben az osztozásokban egy elég sűrű rács ad egy "ε-pontos" jó felosztást.
A Sperner-lemma "séta" módszere gyorsabb, mint az összes lehetséges eset végignézése.

Általánosítsunk!

Ha egy körvonalat folytonosan egy egyenesbe képezünk, lesz két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Borsuk–Ulam tétel

Ha a tér valamely gömbfelületét folytonosan egy síkba képezzük, mindig van két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

Borsuk–Ulam tétel

Ha a k-dimenziós tér valamely ($k - 1$ dimenziós) gömbfelületét folytonosan egy $k - 1$ dimenziós (hiper)síkba képezzük, mindig van két átellenes pont, amelyek képe megegyezik.

A Borsuk–Ulam tétel bizonyításáról

Hasonló a Brouwer-tételhez (annál általánosabb).
Az S^{k-1} gömb helyett legyen B^{k-1} egy "oktaéder-szerű gömb", amelyre $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| = 1$.

A Borsuk–Ulam tétel bizonyításáról

Hasonló a Brouwer-tételhez (annál általánosabb).
Az S^{k-1} gömb helyett legyen B^{k-1} egy "oktaéder-szerű gömb", amelyre $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| = 1$.
Vegyük ennek egy háromszögelését (szimplexekre) az origóra szimmetrikusan.

Tucker-lemma

Ha egy ilyen háromszögelésben a csúcsokat páratlan módon $(f(-x) = -f(x))$ megszámozzuk a $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$ számokkal. Ekkor lesz olyan él, amelynek pontjaira ellentett sámokat írtunk.

A Tucker-lemma hasonló "sétálós" konstruktív módon bizonyítható, s belőle a Borsuk–Ulam tétel is.

Adott 3 test (a kenyérszeletek, a vaj és a sonkaszelet). Van olyan sík ("egyenes vágás"), amely egyszerre felezi mindhárom test térfogatát.

A sonkásszendvics-tétel

Adott 3 test (a kenyérszeletek, a vaj és a sonkaszelet). Van olyan sík ("egyenes vágás"), amely egyszerre felezi mindhárom test térfogatát.

Bizonyítás.
Vegyük körül a testeket egy elég nagy gömbbel.
A gömb minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan síkokat, amelyek külön-külön felezik a testeket (ilyen síkok vannak). A felező síkok az átmérőt az A, B, C pontokban metszik.

A sonkásszendvics-tétel

Adott 3 test (a kenyérszeletek, a vaj és a sonkaszelet). Van olyan sík ("egyenes vágás"), amely egyszerre felezi mindhárom test térfogatát.

Bizonyítás.
Vegyük körül a testeket egy elég nagy gömbbel.
A gömb minden P pontjából húzzunk egy irányított átmérőt; majd húzzunk az átmérőre merőlegesen olyan síkokat, amelyek külön-külön felezik a testeket (ilyen síkok vannak). A felező síkok az átmérőt az A, B, C pontokban metszik.
Legyen

$$f(P) := (a - b,\ b - c)$$

(a megfelelő pontok koordinátáinak különbségeiből képezett számpár).
A függvény mindkét komponense az átellenes pontokban előjelet vált, másrészt van olyan átellenes pontpár, ahol $f(P) = f(P')$, azaz $A = B = C$; itt lesz a keresett sík.

A konszenzusos felezés

Aladár oszt, Béla választ ... Aladár azt szeretné, hogy az ő része az ő mértékével legyen $\geq \frac{1}{2}$ ÉS Béla része Béla mértékével $\leq \frac{1}{2}$!

A konszenzusos felezés

Aladár oszt, Béla választ ... Aladár azt szeretné, hogy az ő része az ő mértékével legyen $\geq \frac{1}{2}$ ÉS Béla része Béla mértékével $\leq \frac{1}{2}$!

A *konszenzusos* felezés

Egy pizzát n gyerek a saját (különböző, folytonos) mértékével mér. Két részre tudjuk-e osztani úgy a pizzát, hogy mindannyian egyformának mérjék a két részt?

A konszenzusos felezés 2.

A pizza egyik átmérője legyen 1; erre merőleges vágásokkal $n+1$ részre vágjuk, az átmérő vágásai x_1, x_2, ..., x_{n+1}, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1$.

A konszenzusos felezés 2.

A pizza egyik átmérője legyen 1; erre merőleges vágásokkal $n+1$ részre vágjuk, az átmérő vágásai x_1, x_2, ..., x_{n+1}, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1$.
Egyes darabok uniója legyen az A^- halmaz, a többieké az A^+. Tekintsük az $n+1$ dimenziós térben egy "oktaéder alakú gömböt", ennek egy P pontja $P = (\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_{n+1})$, $\pm$ aszerint, hogy a kérdéses darab A^--ba vagy A^+-ba esik.

A konszenzusos felezés 2.

A pizza egyik átmérője legyen 1; erre merőleges vágásokkal $n+1$ részre vágjuk, az átmérő vágásai x_1, x_2, ..., x_{n+1}, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1$.
Egyes darabok uniója legyen az A^- halmaz, a többieké az A^+. Tekintsük az $n+1$ dimenziós térben egy "oktaéder alakú gömböt", ennek egy P pontja $P = (\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_{n+1})$, $\pm$ aszerint, hogy a kérdéses darab A^--ba vagy A^+-ba esik.
P képe legyen: $\Big(\mu_1(A^+) - \mu_1(A^-), \ldots, (\mu_n(A^+) - \mu_n(A^-)\Big)$

A konszenzusos felezés 2.

A pizza egyik átmérője legyen 1; erre merőleges vágásokkal $n+1$ részre vágjuk, az átmérő vágásai x_1, x_2, ..., x_{n+1}, $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1$.
Egyes darabok uniója legyen az A^- halmaz, a többieké az A^+. Tekintsük az $n+1$ dimenziós térben egy "oktaéder alakú gömböt", ennek egy P pontja
$P = (\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_{n+1})$, $\pm$ aszerint, hogy a kérdéses darab A^--ba vagy A^+-ba esik.
P képe legyen: $\Big(\mu_1(A^+) - \mu_1(A^-), \dots, (\mu_n(A^+) - \mu_n(A^-)\Big)$
Ez *páratlan* és folytonos $\Rightarrow$ Borsuk–Ulam tétel $\Rightarrow$ valahol 0, és az a pont (vagy az ellentettje) jó vágás.

A konszenzusos felezés 2.

A pizza egyik átmérője legyen 1; erre merőleges vágásokkal $n+1$ részre vágjuk, az átmérő vágásai x_1, x_2, ..., x_{n+1}, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1$.
Egyes darabok uniója legyen az A^- halmaz, a többieké az A^+. Tekintsük az $n+1$ dimenziós térben egy "oktaéder alakú gömböt", ennek egy P pontja
$P = (\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_{n+1})$, $\pm$ aszerint, hogy a kérdéses darab A^--ba vagy A^+-ba esik.
P képe legyen: $\Big(\mu_1(A^+) - \mu_1(A^-), \ldots, (\mu_n(A^+) - \mu_n(A^-)\Big)$
Ez *páratlan* és folytonos $\Rightarrow$ Borsuk–Ulam tétel $\Rightarrow$ valahol 0, és az a pont (vagy az ellentettje) jó vágás.

Alkalmazások: örökség; két, *n*–*n* fős csoport osztozik valamin ...

Osztozkodás a rosszban is

Van valami "rossz" (például ki kell takarítani a lakást). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját (folytonos) mértékfüggvénye szerint értékel.

Osztozkodás a rosszban is

Van valami "rossz" (például ki kell takarítani a lakást). Ezt *n* gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját (folytonos) mértékfüggvénye szerint értékel.

A *méltányos* osztozkodási módszer most is működik, csak most az egésztől indulunk a "késsel" és csökkentjük – előbb-utóbb valaki fölkiált: vállalom!

Osztozkodás a rosszban is

Van valami "rossz" (például ki kell takarítani a lakást). Ezt n gyerek között kell felosztani, úgy, hogy az osztozkodás végén senki ne legyen elégedetlen, vagy ha mégis, akkor sem hibáztathassa a többieket. Minden gyerek a saját (folytonos) mértékfüggvénye szerint értékel.

A *méltányos* osztozkodási módszer most is működik, csak most az egésztől indulunk a "késsel" és csökkentjük – előbb-utóbb valaki fölkiált: vállalom!
Az "irigységmentes" osztozkodás sokkal nehezebb feladat.

Az $n = 3$ eset

- Aladár, Béla és Csaba irigységmentesen három részre osztanak úgy, hogy mindenki a legnagyobbra törekszik.

irigységmentes osztozkodás a rosszban

Az $n = 3$ eset

- Aladár, Béla és Csaba irigységmentesen három részre osztanak úgy, hogy mindenki a legnagyobbra törekszik.
- Aladár a maga részét kettéosztja Béla és Csaba között: először A és B konszenzussal feleznek, aztán Csaba kiválaszthatja a szerinte kisebbet.

Az $n = 3$ eset

- Aladár, Béla és Csaba irigységmentesen három részre osztanak úgy, hogy mindenki a legnagyobbra törekszik.
- Aladár a maga részét kettéosztja Béla és Csaba között: először A és B konszenzussal feleznek, aztán Csaba kiválaszthatja a szerinte kisebbet.
- Ugyanezt megteszi Béla és Csaba is.

irigységmentes osztozkodás a rosszban

Az $n = 3$ eset

- Aladár, Béla és Csaba irigységmentesen három részre osztanak úgy, hogy mindenki a legnagyobbra törekszik.
- Aladár a maga részét kettéosztja Béla és Csaba között: először A és B konszenzussal feleznek, aztán Csaba kiválaszthatja a szerinte kisebbet.
- Ugyanezt megteszi Béla és Csaba is.

Ez irigységmentes.
Irigykedhet-e mondjuk Béla Csabára? Egy-egy darabot mindketten Aladártól kaptak: ez a darabja Bélának legfeljebb akkora, mint Csabáé. Béla másik darabját Csabától kapta; ez Béla szerint nem nagyobb, mint Cszaba részének fele – viszont Csaba másik darabja Béla szerint pontosan a *legnagyobb* rész fele. $\square$

Köszönöm a figyelmet!

Az előadás anyaga megtalálható itt: www.math.u-szeged.hu/$\sim$nemeth