

Kalkulus II. kollokvium (2005. június 17.)

Elméleti rész

1. Definíciók, tételek (6×4 pont)

- Mondja ki a Newton–Leibnitz formulát!
- Mondja ki a L'Hospital szabályt (a $g(x) \rightarrow \infty$ alakot)!
- Mit ért az alatt, hogy egy függvény improprius értelemben integrálható? (Elég a "jobboldali alapeset".)
- Mit ért az alatt, hogy egy függvény konkáv az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
- Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Definiálja egy függvény alsó, felső és Riemann-féle integrálközelítő összegeit!

2. Bizonyítások (2×12 pont)

- Bizonyítsa be, hogy integrálható függvény abszolút értéke is integrálható, és érvényes az $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ egyenlőtlenség!
- Hogyan jellemezhető egy függvény monotonitása a derivált segítségével? Térjen ki a feltételek szükségességére, elegendőségére, és a szigorú monotonitás esetére is! (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

4. Feladatok (5×10 pont)

- Számítsa ki az $\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx$ határozatlan integrált!
- Számítsa ki az $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ integrált!
- Az $f(x) := x \ln x^2$, $1 \leq x \leq 2$ függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Számítsa ki az így kapott test térfogatát!
- Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja az $\frac{e^x}{1+x}$ függvényt!
- Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja a $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ függvényt!