

Kalkulus II. kollokvium (2005. június 10.)

Elméleti rész

1. Definíciók, tételek (6×4 pont)

- Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
- Mondja ki a Taylor-formuláról szóló tételt!
- Mondja ki a függvény szigorú monoton növekedése és deriváltja közötti kapcsolatot leíró tételleket (szükséges, ill. elégséges feltételek) !
- Mondja ki a L'Hospital szabályt (a $g(x) \rightarrow \infty$) alakot!
- Mit ért az alatt, hogy egy függvény improprius értelemben integrálható? (Elég a "jobboldali alapeset".)
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény szigorúan konvex az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?

2. Bizonyítások (2×12 pont)

- Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Newton–Leibnitz formulát!
- Mutassa be a függvény szélsőértékének létezéséről szóló feltételeket! Szükségesek-e ezek a feltételek? (Vizsgálja pl. az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényeket.) (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

4. Feladatok (5×10 pont)

- Számítsa ki az $\int \frac{9x^2 + 2x - 3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx$ határozatlan integrált!
- Számítsa ki az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ integrált!
- Számítsa ki az $y = \sqrt{x} \ln^2 x$ egyenletű görbe, az $x = 1$ és $x = e$ egyenesek, valamint az x tengely által határolt korlátos zárt síkrész területét!
- Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja az $3\sqrt[3]{x} - x$ függvényt!
- Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja a $(\frac{1+x}{1-x})^4$ függvényt!