

## Kalkulus II. kollokvium (2005. május 31.)

### Elméleti rész

#### 1. Definíciók, tételek ( $6 \times 4$ pont)

- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény (Riemann szerint) integrálható az  $[a, b]$  intervallumon?
- Mondja ki a Taylor-formuláról szóló tételt!
- Mondja ki a függvény szigorú monoton növekedése és deriváltja közötti kapcsolatot leíró tételket (szükséges, ill. elégséges feltételek) !
- Definiálja egy függvény primitív függvényeit!
- Fogalmazza meg a parciális integrálás formuláját (mindkét alakban, tehát a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozó alakot is)!
- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény konkáv az  $\langle a, b \rangle$  intervallumon?

#### 2. Bizonyítások ( $2 \times 12$ pont)

- Fogalmazza meg és bizonyítsa be az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mutassa be a függvény szélsőértékének létezéséről szóló feltételeket! Szükségesek-e ezek a feltételek? (Vizsgálja pl. az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényeket.) (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

#### 4. Feladatok ( $5 \times 10$ pont)

- Számítsa ki az  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}} dx$  határozatlan integrált!
- Számítsa ki az  $\int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$  integrált!
- Az  $f(x) := x\sqrt{\sin x}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  függvény grafikonját megforgatjuk az  $x$  tengely körül. Számítsa ki az így kapott test térfogatát!
- Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja az  $\frac{1}{x^2-1}$  függvényt!
- Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja a  $x \ln |x|$  függvényt!