Kalkulus II. kollokvium (2005. május 20.)

Elméleti rész

1. **Definíciók, tételek** (6×4 pont)

a) Mit ért azon, hogy az f függvénynek az a helyen helyi szélsőértéke van?

b) Mondja ki a középérték-tétel Cauchy-féle alakját!

c) Mondja ki a függvény monoton csökkenése és deriváltja közötti kapcsolatot leíró tételeket (szükséges, ill. elégséges feltételek) !

d) Definiálja egy függvény alsó, felső és Riemann-féle integrálközelítő összegeit!

e) Fogalmazza meg a Riemann integrálra vonatkozó helyettesítéses integrálás formulát!

f) Mondja ki a L'Hospital szabályt (a $\frac{\infty}{\infty}$ alakot)!

2. **Bizonyítások** (2×12 pont)

(a) Fogalmazza meg és bizonyítsa be az integrálfüggvény folytonosságáról szóló tételt!

(b) Hogyan (mekkora hibával) közelíthetők függvények a Taylor-polinomjuk segítségével? (Vizsgálja pl. a $\sin x$, $\log(1+x)$ vagy $(1+x)^\alpha$ függvényt.) (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

4. **Feladatok** (5×10 pont)

(a) Számítsa ki az $\int x \ln^2 x \, dx$ határozatlan integrált!

(b) Számítsa ki az $\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx$ integrált!

(c) Számítsa ki az $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ és az $x = 1/2$ görbék, valamint az x tengely által határolt korlátos zárt síkrész területét!

(d) Végezzen teljes függvénydiszkussziót, majd ábrázolja az $\frac{x^2}{(x-1)^2}$ függvényt!

(e) Végezzen függvénydiszkussziót, majd ábrázolja a $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+3}$ függvényt! (A második derivált és a konvexitás vizsgálata nem kell.)