Kalkulus II kollokvium (2003. június 12.)

1. **Definíciók, tételek** (6×4 pont)

(a) Mit ért azon, hogy egy függvény előjelet vált egy a pontban?

(b) Mit ért azon, hogy egy függvény konkáv $\langle a, b\rangle$-n?

(c) Mondja ki a Riemann integrál linearitására vonatkozó tételt!

(d) Adja meg a helyettesítéses integrálás formuláját (Riemann integrálra, illetve primitív függvényre is)!

(e) Definiálja egy, az $[a, b]$-n korlátos f függvény alsó integrálközelítő összegeit!

(f) Mondja ki a L'Hospital szabályt (a $g(x) \to \infty$ alakot)!

2. **Kötelező bizonyítás** (11 pont)

Bizonyítsa be, hogy integrálható függvény abszolút értéke is integrálható, továbbá, hogy érvényes az $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ egyenlőtlenség!

3. **Esszé** (20 pont)

A Taylor formula. Alkalmazása függvények kiszámítására (pl. a $\sin x$, $\sqrt{1+x}$, $\log(1+x)$ függvények vizsgálata)

4. **Feladatok**

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$ (10 pont)

(b) $\displaystyle\int x^2 \arctan \frac{1}{x}\, dx$. (10 pont)

(c) Határozza meg az $y = 1 - \ln\cos x$ görbe $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ívének hosszát! (10 pont)

(d) Diszkutálja és ábrázolja az $f(x) = x^4 e^{-x}$ függvényt! (15 pont)