Kalkulus I. kollokvium (2006. január 24.)

Elméleti rész

1. **Definíciók, tételek** (6×4 pont)

a) Mit ért azon, hogy az f függvény baloldali határértéke $-\infty$ az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg.)

b) Mondja ki az összetett függvény folytonosságáról szóló tételt!

c) Mit ért azalatt, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az $\langle a, b\rangle$ intervallumon?

d) Definiálja a konvergens sorozat fogalmát!

e) Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!

f) Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

2. **Bizonyítások** (2×12 pont)

(a) Bizonyítsa be, hogy a folytonosság "$\varepsilon - \delta$-s" és "sorozatos" definíciói ekvivalensek!

(b) Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága (valamelyik állítást bizonyítsa is!)

3. **Feladatok**

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4n+7}{n^2-2n+9}\right)^{n/7}$ (9 pont)

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-4x}}$ (9 pont)

(c) Vizsgálja az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{\ln(2/x)}, & \text{ha } x > 0, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 2x}, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonosságát! (12 pont)

(d) Legyen $f(x) := \log_4 \frac{3-2x}{5+2x}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (13 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$\arcsin\sqrt{x+1} + \frac{\ln 2x}{x^2+1}$

$e^{1-\frac{1}{x}} \cdot (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$