

## Kalkulus I. kollokvium (2006. január 20.)

### Elméleti rész

#### 1. Definíciók, tételek ( $6 \times 4$ pont)

- Mit ért azon, hogy az  $f$  függvény határértéke  $c$  az  $-\infty$ -ben? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Definiálja a sorozat torlódási pontjának fogalmát! (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mit ért az alatt, hogy az  $a_n$  sorozat  $\infty$ -divergens?
- Definiálja az arcsin függvényt!
- Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

#### 2. Bizonyítások ( $2 \times 12$ pont)

- Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai (valamelyik állítást bizonyítsa is!)
- A konvergens sorozatok egyenlőtlenségi tételei (valamelyik állítást bizonyítsa is!)

#### 3. Feladatok

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{6n + 1}$  (8 pont)

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^3}$  (9 pont)

(c) Számítsa ki az  $f(x) := \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}}$  függvény határértékeit a  $-1, 1, 0$  pontokban!  
(12 pont)

(d) Legyen  $f(x) := \sqrt{\ln \frac{x+3}{x-5}}$ . Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (13 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$$(1+x)^{1-x} + \cos(\log x)$$

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$$