

Kalkulus I. kollokvium (2006. január 17.)

Elméleti rész

1. Definíciók, tételek (6×4 pont)

- Mit ért azon, hogy az f függvény jobboldali határértéke $+\infty$ az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Definiálja az adott $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény inverzét!
- Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!
- Mit ért azon, hogy egy függvény egyenletesen folytonos az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
- Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény monoton csökkenő?

2. Bizonyítások (2×12 pont)

- Bizonyítsa be a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Bizonyítsa be, hogy a folytonosság $\varepsilon - \delta$ -s (Cauchy-féle) és sorozatos (Heine-féle) definíciója ekvivalens!

3. Feladatok

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 2}{\sqrt{n^8 + 3n + 4}}$ (8 pont)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n + 7}\right)^{8n}$ (9 pont)

(c) Hol folytonos az alábbi függvény?

$f(x) := (x + 1)2^{-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}\right)}$ (9 pont)

(d) Legyen $f(x) := \frac{1}{2} \log_{1/2} \frac{1+x}{1-x}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (16 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$

$(x^2 + x)^{1/x} + \sin^2 x \cos^3 x$