

Kalkulus I. kollokvium (2006. január 12.)

Elméleti rész

1. Definíciók, tételek (6×4 pont)

- Mit ért azon, hogy az f függvény balról folytonos a -ban? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény differenciálható az a helyen?
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Mit ért azon, hogy egy függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú?
- Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Definiálja az arccos függvényt!

2. Bizonyítások (2×12 pont)

- Bizonyítsa be a Bolzano–Weierstrass tételt!
- Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

3. Feladatok

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 5 \cdot 3^n}$ (9 pont)

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 - x} + x)$ (8 pont)

(c) Hol folytonos az alábbi függvény?

$$f(x) := \begin{cases} 3^x - 2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -\frac{1}{x-3}, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (9 \text{ pont})$$

(d) Legyen $f(x) := \sqrt{\frac{2x^2 - 12x - 14}{x^2 - 4x + 5}}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (16 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$$\sqrt{\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}} + (\arcsin x)^x$$
$$x^3 \cdot (\sin x - \cos x)^3 \cdot (\sin x + \cos x)$$