

## Kalkulus I. kollokvium (2006. jan. 10.)

### 1. Definíciók, tételek ( $6 \times 4$ pont)

- Mit ért az alatt, hogy egy  $f$  függvény balról folytonos az  $a$  helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt!
- Mit ért az alatt, hogy a  $H$  számhalmaz infimuma  $k$ ? (A formális definíciót adja meg!)
- Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mit ért az alatt, hogy az  $a_n$  sorozat  $-\infty$ -divergens?
- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $\langle a, b \rangle$  intervallumon?

### 2. Bizonyítások ( $2 \times 12$ pont)

- Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos az  $\langle a, b \rangle$  (tetszőleges) intervallumon, akkor ott Bolzano–Darboux tulajdonságú is!
- A  $\infty$ -divergens sorozatokra vonatkozó műveleti szabályok és egyenlőtlenségi tételek. (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

### 3. Feladatok

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}}{(-1)^n \cdot 2^n + 3^n}$  (8 pont)

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$  (9 pont)

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 8}{x^2 + 1} \right)^{5x-9}$  (9 pont)

d) Legyen  $f(x) := \frac{1}{\sqrt{\log_5 \frac{4x-1}{3-2x}}}$ . Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (16 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$$x^{\arctg x} + \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

$$\ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + x \ln(1+x^2)$$