

Kalkulus I. kollokvium (2006. január 3.)

Elméleti rész

1. Definíciók, tételek (6×4 pont)

- Mit ért azon, hogy az f függvény határértéke a -ban $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mit ért azon, hogy α az (a_n) sorozat torlódási pontja?
- Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!
- Definiálja egy (nem üres) számhalmaz infimumát!
- Definiálja egy adott függvény inverzfüggvényét!

2. Bizonyítások (2×12 pont)

- Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Milyen tételeket ismer az intervallumon folytonos függvényekről? (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

4. Feladatok

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^3 - 2n(n+4)^2}{n^3 + 8}$ (8 pont)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n!}$ (9 pont)

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1)$ (9 pont)

(d) Legyen $f(x) := \sqrt{2 \ln(2-x) + \ln \frac{1}{x}}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (16 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$$17^{(1-\frac{1}{x})} \cdot (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} + \operatorname{arctg}(\cos x)$$