

Kalkulus I. kollokvium (2005. december 28.)

Elméleti rész

1. Definíciók, tételek (6×4 pont)

- Mit ért azon, hogy az f függvény folytonos a -ban? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény differenciálható az a helyen?
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Mit ért azon, hogy egy függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú?
- Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
- Mondja ki a rendőr-elvet!

2. Bizonyítások (2×12 pont)

- Bizonyítsa be, hogy az $(1 + \frac{1}{n})^n$ és az $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük megegyezik!
- Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága (Valamelyik állítását bizonyítsa is!)

4. Feladatok

Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\frac{\sqrt[3]{25} + 6\sqrt[3]{5} - 7}{\sqrt[3]{5} - 1}$ (9 pont)

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ (9 pont)

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ (8 pont)

(d) Legyen $f(x) := \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 6x - 7}}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, vizsgálja a jellegzetes határértékeket, a függvény monotonitását és folytonosságát! (16 pont)

(e) Differenciálja az alábbi függvényeket: (8 pont)

$$(1 - x^2)^{\arcsin x^2} + \sqrt[12]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + e^{\cos^2 x}$$