

Kalkulus I. kollokvium (2005. jan. 25.)

1. Definíciók, tételek

- Mit ért az alatt, hogy az f függvény balról folytonos a -ban? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény értelmezési tartományán monoton csökkenő?
- Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
- Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
- Mondja ki a konvergens sorozatokról szóló második egyenlőtlenségi tételt! (Amikor azt tesszük fel, hogy $a > b$.)

2. Kötelező bizonyítás

Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

3. Esszé

Függvény inverze. (Definíció, invertálhatóság, invertálhatóság és monotonitás kapcsolata, folytonosság, differenciálhatóság, példák, ...)

4. Feladatok

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1} - n}{3n - \sqrt{n^2 - 1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{x^2} \operatorname{tg} 2x}$

c) Tekintsük az $f(x) := \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x-1}}}$ függvényt. Határozza meg az f függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, jellegzetes limeseit. Vizsgálja a függvény folytonosságát és monotonitását, vázlatosan ábrázolja!

(d) Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$(\sin x)^{\cos x} + \log_{1/3} \log_{10}(x^2), \quad 2^{x + \sqrt[3]{x}} \cdot e^{\operatorname{tg}^2 x}$$