

## Kalkulus I. kollokvium (2005. jan. 21.)

### 1. Definíciók, tételek

- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény az  $a$  helyen differenciálható?
- Mondja ki a konvergens sorozatokról szóló első egyenlőtlenségi tételt! (Amikor azt tesszük fel, hogy  $a_n \geq b_n$ .)
- Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény határértéke a  $-\infty$ -ben  $l$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a hányadosfüggvény folytonosságáról szóló tételt!
- Mondja ki az intervallumon monoton és folytonos függvény inverzéről szóló tételt!
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

### 2. Kötelező bizonyítás

Bizonyítsa, hogy az  $(1 + \frac{1}{n})^n$  és  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  sorozatok konvergenssek és határértékük megegyezik!

### 3. Esszé

Intervallumon folytonos függvények (definíció, Bolzano–Darboux tulajdonság, a korlátos zárt intervallum esete ...)

### 4. Feladatok

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-2})$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$

c) Tekintsük az  $f(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  függvényt. Határozza meg az  $f$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, jellegzetes limeseit. Vizsgálja a függvény folytonosságát és monotonitását, vázlatosan ábrázolja!

(d) Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$\ln \frac{7-5x}{2x-3} + e^{e^x} + x^{1/x}, \quad \operatorname{tg}(x^3) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$