

Kalkulus I. kollokvium (2005. jan. 18.)

1. Definíciók, tételek

- Mit ért az alatt, hogy egy f függvény balról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt!
- Mit ért az alatt, hogy a H számhalmaz infimuma k ? (A formális definíciót adja meg!)
- Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mit ért az alatt, hogy az a_n sorozat $-\infty$ -divergens?
- Mit ért az alatt, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?

2. Kötelező bizonyítás

Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos az $\langle a, b \rangle$ intervallumon, akkor ott Bolzano–Darboux tulajdonságú is!

3. Esszé

Sorozatok torlódási pontjai (definíció, Bolzano–Weierstrass tétel, a nem korlátos sorozatok esete, $\overline{\lim}$ és $\underline{\lim}$, ...)

4. Feladatok

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{n^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \operatorname{tg} x}$

c) Tekintsük az $f(x) := \sqrt{\log_{2/3} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 7x + 10} \right)}$ függvényt. Határozza meg az f függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, jellegzetes limeseit. Vizsgálja a függvény folytonosságát és monotonitását, vázlatosan ábrázolja!

(d) Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$\operatorname{tg} \frac{2x + 2}{1 - x} \cdot e^{e^x}, \quad \frac{\sin(1 + \sqrt{x})}{2 \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x}}$$