

Kalkulus I. kollokvium (2005. január 11.)

1. Definíciók, tételek

- a) Mit értünk az alatt, hogy egy függvény differenciálható a -ban?
- b) Mit értünk az alatt, hogy egy függvény monoton csökkenő?
- c) Definiálja egy függvény inverzét!
- d) Mondja ki a korlátos zárt intervallumon folytonos függvény első és utolsó elérési tulajdonságáról szóló tételt!
- e) Mit ért az alatt, hogy egy sorozat $-\infty$ -divergens?
- f) Mit jelent az, hogy egy függvény az $\langle a, b \rangle$ intervallumon egyenletesen folytonos?

2. Kötelező bizonyítás

Mondja ki és bizonyítsa be a Bolzano–Weierstrass tételt!

3. Esszé

Függvények lokális folytonossága (definíció, tulajdonságok, műveletek, ...)

4. Feladatok

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{1}{n} + \frac{3^n + (-3)^n}{2^{2n}} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - x + 1} \right)^{x^2 + 2}$

(c) Tekintsük az

$$f(x) := \log_{1/2} \frac{4 - x^2}{2x^2 - 10x + 12}$$

függvényt. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, jellegzetes limeseit. Hol folytonos a függvény? Hol monoton a függvény? Készítsen ábrát!

(d) Differenciálja az alábbi függvényeket:

$$x^{1/x} + 3^{\sin(1-x)}, \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \cos \frac{1}{x+x^2}$$