

Kalkulus I. kollokvium (2005. január 4.)

1. Definíciók, tételek

- Mit ért azon, hogy az f függvény jobbról folytonos a -ban? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Mit ért azon, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
- Mit ért egy (nemüres) számhalmaz supremumán? (A formális definíciót adja meg!)
- Fogalmazza meg a folytonos függvények fokozatos változás tulajdonságát!

2. Kötelező bizonyítás

Bizonyítsa be, hogy az $(1 + \frac{1}{n})^n$ és az $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük megegyezik!

3. Esszé

Az inverzfüggvény (általános definíció, monotonitás és invertálhatóság, folytonosság, differenciálhatóság, példák ...)

4. Feladatok

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^3 + 1}{3n^2 - n - 3}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

(c) Tekintsük az

$$f(x) := \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$$

függvényt. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, jellegzetes limeseit. Hol folytonos a függvény? Hol monoton a függvény? Készítsen ábrát!

(d) Differenciálja az alábbi függvényeket:

$$\frac{\operatorname{tg}(\ln x^3)}{e^2}, \quad \frac{\sqrt{x - x^2}}{\cos \frac{1}{x^3}}$$