

## Kalkulus I. kollokvium (2004. január 16.)

### 1. Definíciók, tételek

- Mit ért azon, hogy egy függvény határértéke  $a$ -ban  $\infty$ ? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Mit ért azon, hogy egy függvény monoton csökkenő?
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Mondja ki a folytonos függvény inverzéről szóló tételt!
- Mit ért azon, hogy egy függvény differenciálható  $a$ -ban ?
- Mondja ki a folytonos függvények fokozatos változás tulajdonságáról szóló tételt!

### 2. Kötelező bizonyítás

Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos egy korlátos zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos!

### 3. Esszé

A konvergens sorozatok (definíció; monotonitás; korlátosság; műveleti és egyenlőtlenségi tételek; ...)

### 4. Feladatok

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin n}{n(n^2+1)} + \frac{n^2}{(n^2+1)(3n+1)} \right)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x-1} \right)^x$

(c) Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{\log_2(x-3) - \log_2(x-5)}$  függvényt. Határozzuk meg: Az  $f$  értelmezési tartományát és értékkészletét, az értelmezési tartomány végpontjaiban az  $f$  határértékét. Hol folytonos az  $f$  függvény? Monoton-e az  $f$  függvény? Készítsünk ábrát.

(d) Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$f(x) = \arcsin(1-x) + \sqrt{2x-x^2},$$

$$g(x) = \frac{1}{10}e^{-x}(3 \sin 3x - \cos 3x) + e^{\operatorname{tg}^2 x}.$$