

Kalkulus I. kollokvium (2004. január 13.)

1. Definíciók, tételek

- Mit ért azon, hogy az f függvény határértéke a -ban $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- Mit ért azon, hogy α az (a_n) sorozat torlódási pontja?
- Mit ért azon, hogy az f függvény a -ban differenciálható?
- Definiálja a $H \neq \emptyset$ számhalmaz supréumát!
- Mondja ki a korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény szélsőértékeiről szóló tételt!

2. Kötelező bizonyítás

Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!

3. Esszé

Intervallumon folytonos függvények (definíció, tulajdonságok, a korlátos, zárt intervallum esete ...)

4. Feladatok

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 2 \cdot 3^n + 6^n}{3^n + 3 \cdot 4^n + 2 \cdot 6^n} + n \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x} + \frac{1-\cos x}{x^2} \right)$

(c) Tekintsük az $f(x) = \log_2(\log_2 x) + \arccos(1-x)$ függvényt. Határozzuk meg: Az f értelmezési tartományát és értékkészletét, az értelmezési tartomány végpontjaiban az f határértékét. Hol folytonos a függvény? Monoton-e az függvény? Készítsünk ábrát.

(d) Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x} + (\cos x)^x,$$

$$g(x) = \ln^2(x + \sqrt{1-x^2}) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$