

Kalkulus I. kollokvium (2004. január 9.)

1. Definíciók, tételek

- Mit ért azon, hogy az f függvény folytonos a -ban? (Mindkét definíciót adja meg.)
- Definiálja az e^x függvényt!
- Mondja ki a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
- Mit ért azon, hogy a függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú?
- Mit ért azon, hogy az f függvénynek a -ban minimuma van?
- Fogalmazza meg a folytonos függvények fokozatos változás tulajdonságát!

2. Kötelező bizonyítás

Bizonyítsa be, hogy az $(1 + \frac{1}{n})^n$ és az $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük megegyezik!

3. Esszé

Az inverzfüggvény (általános definíció, monotonitás és invertálhatóság, folytonosság, differenciálhatóság, példák...)

4. Feladatok

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+3)^2+3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{2^n+(-2)^n}{3^n} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$

(c) Tekintsük az $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x+1}{x-1}}$ függvényt. Határozzuk meg: Az f értelmezési tartományát és értékkészletét, az értelmezési tartomány végpontjaiban az f határértékét. Hol folytonos az függvény? Monoton-e a függvény? Készítsünk ábrát!

(d) Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

$$f(x) = \ln \frac{7-5x}{2x-3} + e^{e^x} + x^{1/x},$$

$$g(x) = \tan(x^3) \cdot \arctan \sqrt{x}.$$