

Kalkulus I. kollokvium (2003. január 23.) [P]

1. Definíciók, tételek (6x4 pont)

- a) Mit ért az alatt, hogy az f függvény a -ban balról folytonos? (mindkét definíció!)
- b) Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
- c) Mit ért az alatt, hogy az f függvény értelmezési tartományán monoton növekedő?
- d) Mondja ki a Bolzano-Weierstrass tételt!
- e) Definiálja a 2^x függvényt!
- f) Mit ért az alatt, hogy az a_n sorozat $-\infty$ -divergens?

2. Kötelező bizonyítás (11 pont)

Bizonyítsa be, hogy az $(1 + \frac{1}{n})^n$ és $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük megegyezik!

3. Esszé (20 pont)

Intervallumon folytonos függvények (Definíció, Bolzano-Darboux tulajdonság, a korlátos és zárt intervallum esete...)

4. Feladatok

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \cdot 2}{n^3} + \frac{2 \cdot 3}{n^3} + \dots + \frac{n \cdot (n+1)}{n^3} \right]$ (10 pont)

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$ (10 pont)

- c) Állapítsa meg az értelmezési tartományát és értékkészletét az

$$f(x) = 3 - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3-x}}$$

függvénynek. Hol folytonos f ? Vizsgálja meg a jellegzetes limeszeket. Mit lehet mondani a függvény monotonitásáról? Készítsen ábrát a vizsgálat végén. (14 pont)

- d) Határozza meg az

$$f(x) = e^{(4-x^2)}$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Készítsen ábrát. Hol invertálható a függvény? Mi az inverzfüggvény képlete? Határozza meg az inverzfüggvény deriváltjának képletét! (11 pont)

Jó munkát!