

**Kalkulus I. kollokvium (2003. január 22.) [P]**

**1. Definíciók, tételek (6x4 pont)**

- a) Mit ért az alatt, hogy  $\alpha \in \mathbb{R}$  az  $a_n$  sorozat torlódási pontja?
- b) Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény határértéke  $-\infty$ -ben  $c$ ? (mindkét definíció!)
- c) Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény differenciálhányadosa  $a$ -ban  $q$ ?
- d) Mondja ki (a számsorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle konvergenciaritériumot!
- e) Mondja ki a szigorúan monoton, folytonos függvény inverzéről szóló tételt!
- f) Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvénynek  $a$ -ban lokális minimuma van?

**2. Kötelező bizonyítás (11 pont)**

Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos a korlátos és zárt  $[a, b]$  intervallumon, akkor ott egyenletesen is folytonos!

**3. Esszé (20 pont)**

Egyenlőtlenségi tételek konvergens és  $\infty$ -divergens sorozatokra.

**4. Feladatok**

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right]$  (10 pont)

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x^2}$  (10 pont)

- c) Állapítsa meg az értelmezési tartományát és értékkészletét az

$$f(x) = 3 + \sqrt{\frac{x+1}{x^3-x}}$$

függvénynek. Hol folytonos  $f$ ? Vizsgálja meg a jellegzetes limeszeket. Mit lehet mondani a függvény monotonitásáról? Készítsen ábrát a vizsgálat végén. (14 pont)

- d) Határozza meg az

$$f(x) = \ln(-x^2 + 5x - 6) - 2$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Készítsen ábrát. Hol invertálható a függvény? Mi az inverzfüggvény képlete? Határozza meg az inverzfüggvény deriváltjának képletét! (11 pont)

Jó munkát!