

Kalkulus I. kollokvium (2003. január 8.) [P]

1. Definíciók, tételek (6x4 pont)

- a) Mit ért az alatt, hogy  $f(x) \rightarrow \infty$ , ha  $x \rightarrow a + 0$ ? (mindkét definíció!)
- b) Definiálja egy számhalmaz supremumát!
- c) Mit ért az alatt, hogy az  $f$  egyenletesen folytonos  $\langle a, b \rangle$ -n?
- d) Mondja ki a folytonos függvény inverzéről szóló tételt!
- e) Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény differenciálhányadosa  $a$ -ban  $q$ ?
- f) Mondja ki a fokozatos változásról szóló tételt!

2. Kötelező bizonyítás (11 pont)

Határozza meg a  $\sin x$  és az  $\arcsin x$  függvények differenciálhányados-függvényét!

3. Esszé (20 pont)

Sorozatok torlódási pontjai. (Definíció, Bolzano-Weierstrass tétel, nem korlátos sorozatok esete,  $\overline{\lim}$  és  $\underline{\lim}$ , ...)

4. Feladatok

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \sqrt[n]{n^4} - 24 \sqrt[n]{n^2} + 8}{16 \sqrt[n]{n^4} - 20 \sqrt[n]{n^2} + 4}$  (10 pont)

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{x^2}$  (10 pont)

- c) Állapítsa meg az értelmezési tartományát és értékkészletét az

$$f(x) = \frac{2}{e^{x/(4-x^2)} - 1}$$

függvénynek. Hol folytonos  $f$ ? Vizsgálja meg a jellegzetes limeszeket. Mit lehet mondani a függvény monotonitásáról? Készítsen ábrát a vizsgálat végén. (14 pont)

- d) Hol invertálható az

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\log_2(x-1)} + 1$$

függvény? Határozza meg az inverzfüggvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Készítsen ábrát. Mi az inverzfüggvény képlete? Határozza meg az inverzfüggvény egy adott (konkrét) pontjához tartozó érintő egyenletét! (11 pont)

Jó munkát!